

# APLICACIONES EN CÁLCULO

## Introducción al estudio de las derivadas

Dada la siguiente función  $f(x) := x^2$ : (1) encontrar su derivada, (2) el valor de la pendiente en cualquier punto dado de la curva, (3) la ecuación de la pendiente en el punto seleccionado y (4) graficar la ecuación y la ecuación de la pendiente en el punto dado.

### Solución

(1)  
Calcular su derivada simbólicamente:

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 2 \cdot x$$

(2)  
Calcular el valor de la derivada en un punto  $n$  dado y almacenar este valor en una variable llamada  $m$  (pendiente de la recta tangente) para uso posterior:

$$n := \frac{1}{2} \quad m := \frac{d}{dn} f(n)$$

(3)  
Para identificar la ecuación de la pendiente, definimos una fórmula de cálculo en función de la pendiente y un punto:

$$\text{recta}(\text{pendiente}, P, x) := \text{pendiente} \cdot (x - P_1) + P_2$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección entre la recta y la curva dada

$$P := \begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix} \quad P \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ecuación calculada de la recta:

$$\text{recta}(m, P, x) \rightarrow x - \frac{1}{4}$$

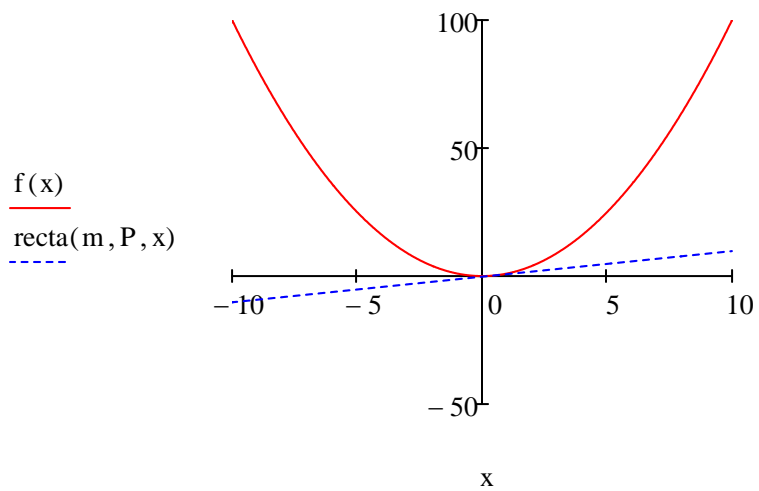
Grado de inclinación de la pendiente:

$$\text{atan}(m) = 45 \text{ deg}$$

$$\text{atan}(m) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

(4)

Graficación:



Cambiar el punto de cálculo de la derivada y observar los cambios

$$n := 3$$

$$m := \frac{d}{dn} f(n)$$

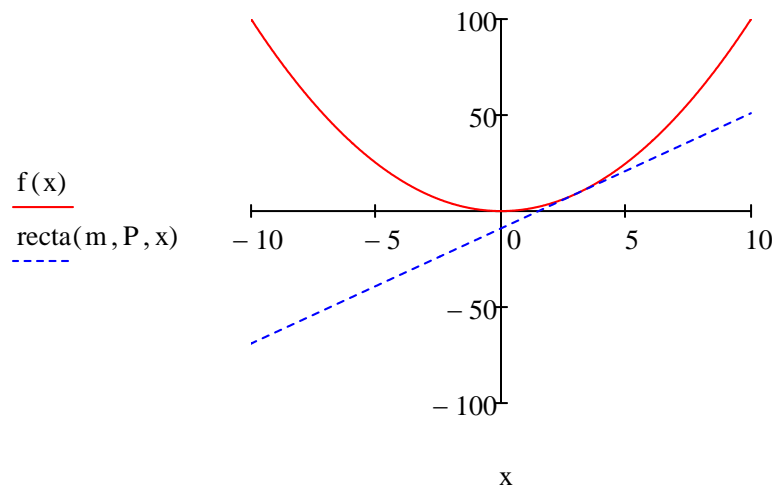
$$P := \begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}$$

$$P \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{recta}(m, P, x) \rightarrow 6 \cdot x - 9$$

$$\text{atan}(m) = 80.538 \text{ deg}$$

$$\text{atan}(m) \rightarrow \text{atan}(6)$$



## Ejemplo

Para la siguiente función  $2x^3 - 9x^2 + 12x$  encontrar: (1) su derivada en cualquier punto, (2) encontrar los rangos de  $x$  para los cuales la función es creciente y decreciente, (3) calcular la ecuación de la pendiente en cualquier punto dado, (4) graficar la función y la pendiente en un punto dado.

(1)  
Definimos la expresión en función de  $x$ :

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x$$

Cálculo de la derivada de la función:

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 6x^2 - 18x + 12$$

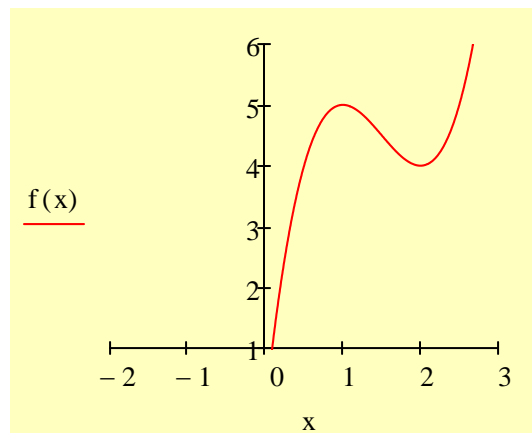
(3)  
Definir rangos para el estudio de la gráfica:

$$x1 := -2$$

$$x2 := 3$$

$$y1 := 1$$

$$y2 := 6$$



Cálculo del valor de la función en cualquier punto:

$$x0 := 0$$

$$f(x0) \rightarrow 0$$

Calcular los valores para los cuales la derivada vale cero:

$$\frac{d}{dx}f(x) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Estudiar los rangos en los cuales la función es creciente (derivada positiva) o decreciente (derivada negativa)

$$x1 := -3, -2.5 .. 2.5$$

$x1 =$	$\frac{d}{dx1} f(x1) =$
-3	120
-2.5	94.5
-2	72
-1.5	52.5
-1	36
-0.5	22.5
0	12
0.5	4.5
1	$-2.686 \cdot 10^{-14}$
1.5	-1.5
2	$-6.188 \cdot 10^{-15}$
2.5	4.5

Dibujar la pendiente en los puntos críticos:

$$\text{sol} := \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x1 := \text{sol}_1 \quad x2 := \text{sol}_2$$

Cálculo del primer punto

$$A1 := \begin{pmatrix} x1 \\ f(x1) \end{pmatrix} \quad A1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A2 := \begin{pmatrix} x2 \\ f(x2) \end{pmatrix} \quad A2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la ecuación de la primera recta:

$$m1 := \frac{d}{dx1} f(x1) \quad m1 \rightarrow 0$$

Cálculo de la ecuación de la segunda recta:

$$\text{recta}(m1, A1, x) \rightarrow 5$$

$$m2 := \frac{d}{dx} f(x2) \quad m2 \rightarrow 0$$

$$\text{recta}(m2, A2, x) \rightarrow 4$$

Definir rangos para el estudio de la gráfica:

$$x1 := -2$$

$$x2 := 3$$

$$y1 := 1$$

$$y2 := 6$$

