MATHEMATICA

Geometría - Triángulos

Ricardo Villafaña Figueroa

Contenido

TRIÁNGULOS

Cálculo de los ángulos interiores de un triángulo

Ejemplo

¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos A (2, 6), B (-3, -1) y C (4, -5)?

Solución

Definir una función para el cálculo de la pendiente entre dos puntos dados:

$$m[A\_, B\_] := \frac{B[[2]] - A[[2]]}{B[[1]] - A[[1]]}$$

Definir una función para el cálculo del ángulo entre dos líneas:

$$Angulo[m2\_, m1\_] := ArcTan\left[\frac{m2 - m1}{1 + m2\ m1}\right]$$

Definir los tres puntos que determinan el triángulo:

```
A = {2, 6}; B = {-3, -1}; C1 = {4, -5};
```

Calcular pendiente de la línea AB:

```
mAB = m[A, B]
```

$$\frac{7}{5}$$

Calcular la pendiente de la línea AC1:

```
mAC1 = m[A, C1]
```

$$-\frac{11}{2}$$

Calcular la pendiente de la línea BC1:

```
mBC1 = m[B, C1]
```

$-\frac{4}{7}$

Calcular el ángulo *alfa* comprendido entre las líneas AC y AB (ángulo medido en grados):

```
alfa = Angulo[mAC1, mAB] (180 / π)
```

$\frac{180\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{69}{67}\right]}{\pi}$

```
N[alfa]
```

45.8425

Calcular el ángulo *beta* comprendido entre las líneas AB y BC1 (ángulo medido en grados):

```
beta = Angulo[mAB, mBC1] (180 / π)
```

$\frac{180\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{69}{7}\right]}{\pi}$

```
N[beta]
```

84.2072

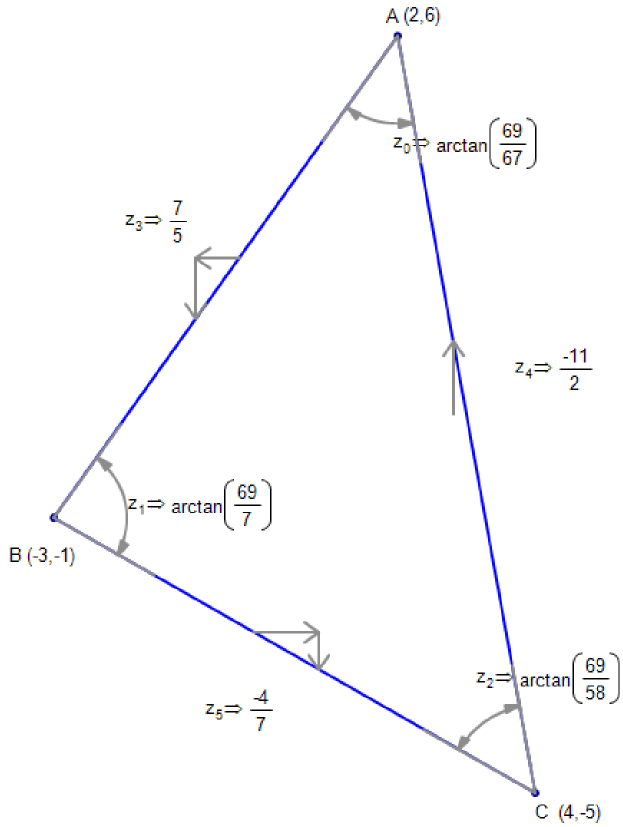
Calcular el tercer ángulo *gama* comprendido entre las líneas AC1 y BC1:

```
gama = Angulo[mBC1, mAC1] (180 / π)
```

$\frac{180\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{69}{58}\right]}{\pi}$

```
N[gama]
```

49.9503


A (2,6)
B (-3,-1)
C (4,-5)
z0⇒ arctan(69/67)
z1⇒ arctan(69/7)
z2⇒ arctan(69/58)
z3⇒ 7/5
z4⇒ -11/2
z5⇒ -4/7

Baricentro

Ejemplo

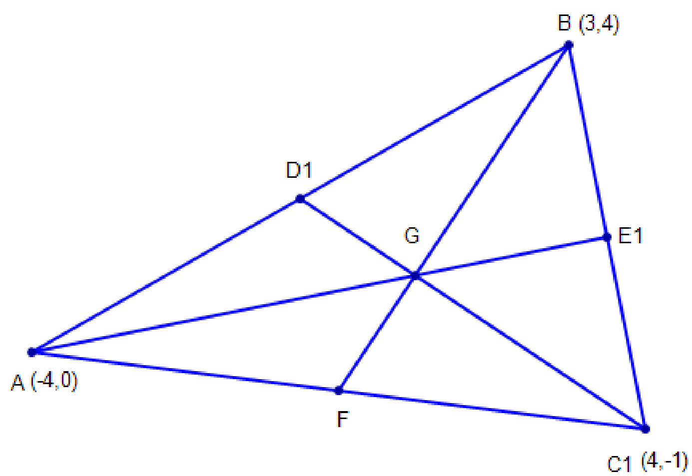
Los vértices de un triángulo son los siguientes: A (-4, 0), B (3, 4) y C (4, -1). Encontrar el baricentro del triángulo.

Solución

Mediana: recta que pasa por el vértice y por el punto medio del lado opuesto.

Baricentro: punto de intersección de las medianas de un triángulo.

Representación visual del problema:



Definir la fórmula para calcular el punto medio de un segmento:

$$\text{PuntoMedio}[A\_, B\_] := \left\{\frac{A[[1]] + B[[1]]}{2}, \frac{A[[2]] + B[[2]]}{2}\right\}$$

Definir los tres puntos dados:

```
A = {-4, 0}; B = {3, 4}; C1 = {4, -1};
```

Calcular los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo:

```
D1 = PuntoMedio[A, B]
```

$\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

```
E1 = PuntoMedio[B, C1]
```

$\left\{\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

```
F = PuntoMedio[A, C1]
```

$\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$

Definir la fórmula para calcular la ecuación de las mediatrices:

$$\text{recta}[A\_, B\_, x\_] := \frac{B[[2]] - A[[2]]}{B[[1]] - A[[1]]}(x - A[[1]]) + A[[2]]$$

Calcular las ecuaciones de las mediatrices:

```
l1 = recta[A, E1, x]
```

$\frac{4 + x}{5}$

```
l2 = recta[B, F, x]
```

$4 + \frac{3}{2}(-3 + x)$

```
l3 = recta[C1, D1, x]
```

$-1 - \frac{2}{3}(-4 + x)$

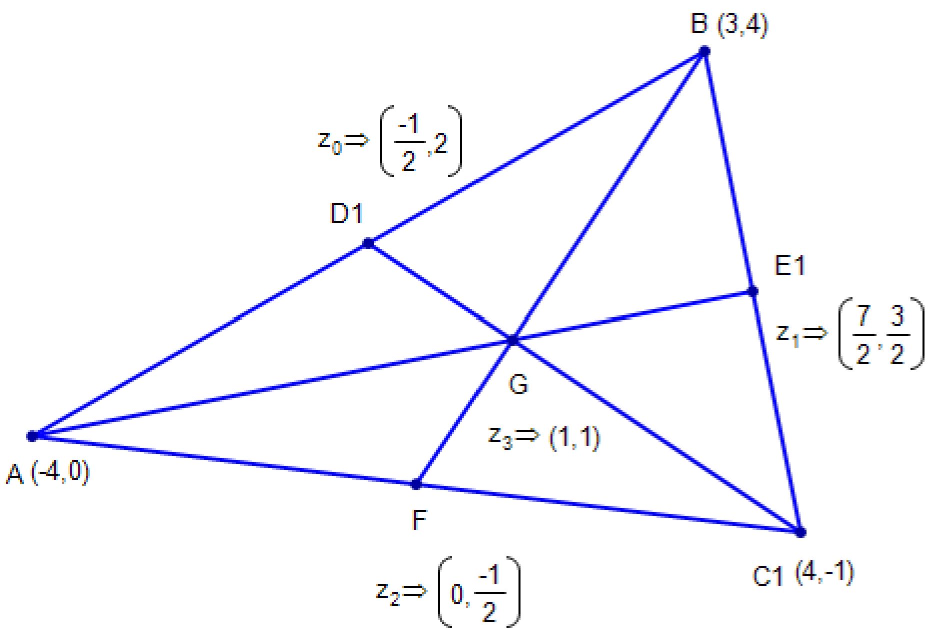
Calcular el punto de intersección (baricentro/ centroide) de dos de las mediatrices:

```
Solve[{l1 == y, l2 == y}, {x, y}]
```

```
{{x → 1, y → 1}}
```

```
Solve[{l1 == y, l3 == y}, {x, y}]
```

```
{{x → 1, y → 1}}
```



Nota. El punto de intersección de las medianas también se puede encontrar mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Interseccion}[A\_, B\_, C\_] := \left\{\frac{A[[1]] + B[[1]] + C[[1]]}{3}, \frac{A[[2]] + B[[2]] + C[[2]]}{3}\right\}$$

Sustituyendo los tres vértices dados:

```
Interseccion[A, B, C1]
```

```
{1, 1}
```

Ortocentro

Ejemplo

Los vértices de un triángulo son los siguientes: A (-3, 0), B (0, 2) y C (1, -2). Encontrar las ecuaciones de cada uno de sus lados y el ortocentro.

Solución

Altura de un triángulo: es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto.

Ortocentro: Intersección de las tres alturas del triángulo.

Definir la fórmula para calcular la pendiente entre dos puntos:

$$m[A\_, B\_] := \frac{B[[2]] - A[[2]]}{B[[1]] - A[[1]]}$$

Definir los tres puntos dados:

```
A = {-3, 0}; B = {0, 2}; C1 = {1, -2};
```

Calcular la pendiente para cada uno de los lados del triángulo:

Lado AB:

```
mAB = m[A, B]
```

$$\frac{2}{3}$$

Lado BC:

```
mBC = m[B, C1]
```

-4

Lado CA:

```
mCA = m[C1, A]
```

$$-\frac{1}{2}$$

Definir la fórmula punto-pendiente para calcular cada una de las ecuaciones de las alturas:

```
recta[A_, m_, x_] := m (x - A[[1]]) + A[[2]]
```

Altura que pasa por A (perpendicular a BC):

$$\text{PendienteA} = \frac{-1}{\text{mBC}}$$

$$\frac{1}{4}$$

```
eqA = y == recta[A, PendienteA, x]
```

$$y == \frac{3 + x}{4}$$

Altura que pasa por B (perpendicular a CA):

$$\text{PendienteB} = \frac{-1}{\text{mCA}}$$

2

```
eqB = y == recta[B, PendienteB, x]
```

y == 2 + 2 x

Altura que pasa por C (perpendicular a AB):

```
PendienteC = -1/mAB
```

$-\frac{3}{2}$

```
eqC = y == recta[C1, PendienteC, x]
```

$y == -2 - \frac{3}{2}(-1 + x)$

Calcular el punto de intersección de dos de las alturas:

```
Solve[{eqA, eqB}, {x, y}]
NSolve[{eqA, eqB}, {x, y}]
```

$\{\{x \to -\frac{5}{7}, y \to \frac{4}{7}\}\}$

{{x → -0.714286, y → 0.571429}}

```
Solve[{eqA, eqC}, {x, y}]
NSolve[{eqA, eqC}, {x, y}]
```

$\{\{x \to -\frac{5}{7}, y \to \frac{4}{7}\}\}$

{{x → -0.714286, y → 0.571429}}

Cálculo del área de un triángulo

Ejemplo

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son A (-1, 1), B (3, 4) y C (5, -1).

Primera solución

Dadas las coordenadas de los vértices, el área de un triángulo viene dada por la siguiente fórmula:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \left|(y1 - y3) \cdot x2 - (x1 - x3) \cdot y2 + x1 \cdot y3 - x3 \cdot y1\right|$$

Definir una fórmula para el cálculo del área:

```
AreaTriangulo[A_, B_, C_] := 1/2 Abs[
   (A[[2]] - C[[2]]) B[[1]] -
    (A[[1]] - C[[1]]) B[[2]] +
    A[[1]] C[[2]] - C[[1]] A[[2]]]
```

Definir los vértices dados:

```
A = {-1, 1}; B = {3, 4}; C1 = {5, -1};
```

Calcular el área del triángulo:

```
AreaTriangulo[A, B, C1]
```

```
13
```

Segunda solución

La fórmula

$$K = \frac{1}{2}\cdot\left|(y1 - y3)\cdot x2 - (x1 - x3)\cdot y2 + x1\cdot y3 - x3\cdot y1\right|$$

Se puede expresar en términos del valor absoluto del determinante:

$$K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{bmatrix}$$

Definir una fórmula para calcular el área a partir de un determinante:

```
AreaTringulo[A_, B_, C_] := 1/2 Abs[Det[( A[[1]]  A[[2]]  1
                                          B[[1]]  B[[2]]  1
                                          C[[1]]  C[[2]]  1 )]]
```

Definir los tres puntos:

```
A = {-1, 1}; B = {3, 4}; C1 = {5, -1};
```

Calcular el área:

```
AreaTringulo[A, B, C1]
```

```
13
```

Tercera solución

Se puede obtener el área de un triángulo en función de la longitud de cada uno de sus lados utilizando la fórmula de Herón:

$$K = \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde *a, b* y *c* representan cada una de las longitudes del triángulo y *s* viene dada por la fórmula:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Para calcular la longitud de cada uno de los lados, definimos la siguiente fórmula (distancia entre dos puntos dados):

```
Distancia[A_, B_] := √((B[[2]] - A[[2]])^2 + (B[[1]] - A[[1]])^2)
```

Definir los tres puntos dados:

```
A = {-1, 1}; B = {3, 4}; C1 = {5, -1};
```

Calcular la longitud de cada uno de los lados.

Lado BC:

```
a = Distancia[B, C1]
```

$\sqrt{29}$

Lado AC:

```
b = Distancia[A, C1]
```

$2\sqrt{10}$

Lado AB:

```
c = Distancia[A, B]
```

5

Definir una fórmula para calcular el valor promedio de los lados:

```
s[a_, b_, c_] := 1/2 (a + b + c)
```

```
s1 = s[a, b, c]
```

$$\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{10}+\sqrt{29}\right)$$

Definir una fórmula para calcular el área del triángulo con la fórmula de Herón:

```
AreaTringulo[s_, a_, b_, c_] := √(s (s - a) (s - b) (s - c))
```

Calcular el área

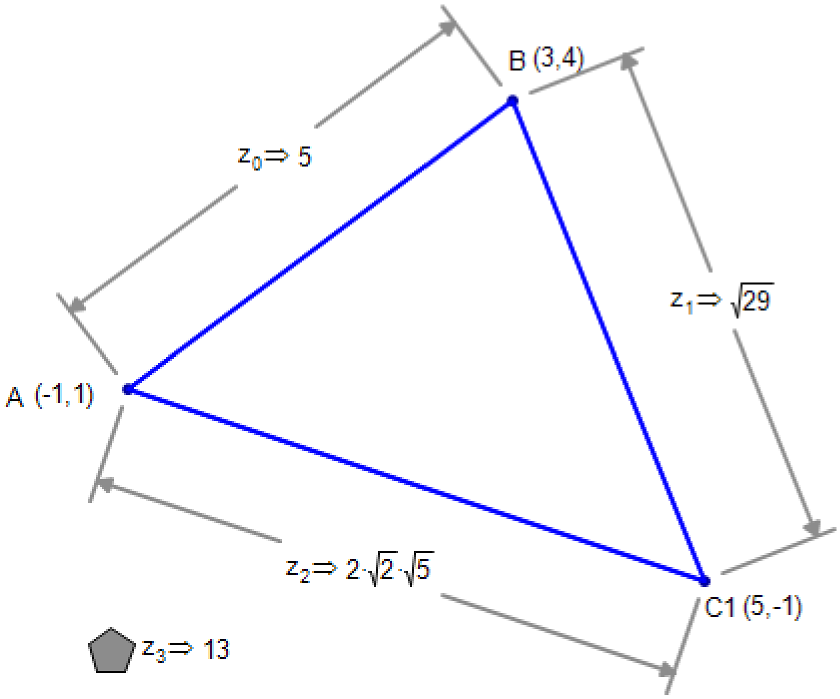
```
Area = AreaTringulo[s1, a, b, c]
```

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{10}+\sqrt{29}\right)\left(-5+\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{10}+\sqrt{29}\right)\right)\left(-2\sqrt{10}+\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{10}+\sqrt{29}\right)\right)\left(-\sqrt{29}+\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{10}+\sqrt{29}\right)\right)\right)}$$

Simplificar el resultado obtenido:

```
Simplify[Area]
```

13


B (3,4)
$z_0 \Rightarrow 5$
$z_1 \Rightarrow \sqrt{29}$
A (-1,1)
$z_2 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$
C1 (5,-1)
$z_3 \Rightarrow 13$