MATHEMATICA

Geometría - Recta

Ricardo Villafaña Figueroa

Contenido

SISTEMA DE COORDENADAS

Distancia entre dos puntos

Definición

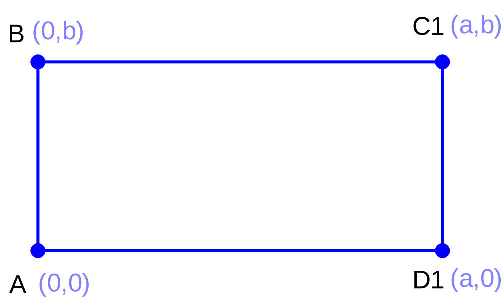
La distancia $distancia\ (P_1, P_2)$ entre cualesquiera de dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $P(x_2, y_2)$ en un plano coordenado es:

$$distancia\ (P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplo

Demostrar analíticamente que las diagonales de un rectángulo ABCD son iguales.

Solución



Definir una fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos dados:

$$\text{Distancia}[A\_, B\_] := \sqrt{(B[[2]] - A[[2]])^2 + (B[[1]] - A[[1]])^2}$$

Definir los cuatro puntos que forman las diagonales:

```
A = {0, 0}; B = {0, b}; C1 = {a, b}; D1 = {a, 0};
```

Utilizar la fórmula de distancia definida anteriormente para encontrar la longitud de las diagonales.

Distancia entre la diagonal AC1:

```
Distancia[A, C1]
```

$\sqrt{a^2 + b^2}$

Distancia entre la diagonal BD1:

```
Distancia[B, D1]
```

$\sqrt{a^2 + b^2}$

El resultado encontrado demuestra que las diagonales son iguales.

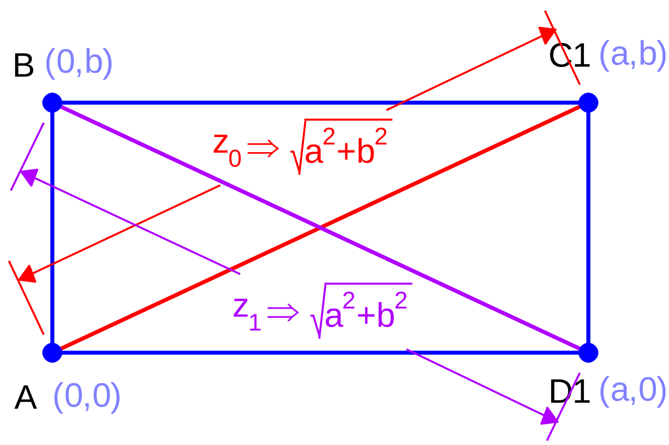


Figura hecho con Geometry Expressions

Punto Medio

Definición

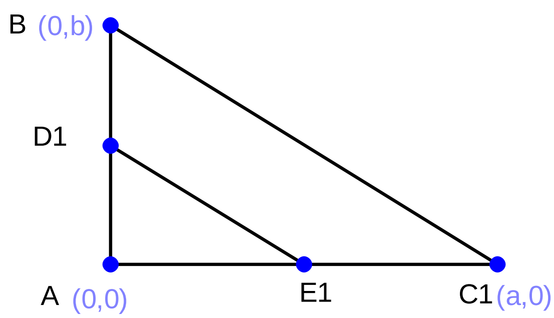
El punto medio de un segmento determinado por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $P(x_2, y_2)$ es:

$$P_m(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

Ejemplo

Demostrar analíticamente que el segmento que une los puntos medios de los dos lados de un triángulo, tiene la mitad de la longitud del tercer lado.

Solución



Definir una fórmula para encontrar el punto medio entre dos puntos dados:

```
PuntoMedio[A_, B_] := {(A[[1]] + B[[1]])/2, (A[[2]] + B[[2]])/2}
```

Definir los tres puntos que determinan el triángulo:

```
A = {0, 0}; B = {0, b}; C1 = {a, 0};
```

Consideremos los puntos medios de los lados AB y AC:

```
D1 = PuntoMedio[A, B]
```

$$\left\{0, \frac{b}{2}\right\}$$

```
E1 = PuntoMedio[A, C1]
```

$$\left\{\frac{a}{2}, 0\right\}$$

Calculemos la longitud del segmento D1E1 que une los puntos medios del triángulo:

```
DE = Distancia[D1, E1]
```

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Calculemos la longitud del tercer lado paralelo y que es paralelo al segmento DE y dividamos el resultado obtenido entre dos:

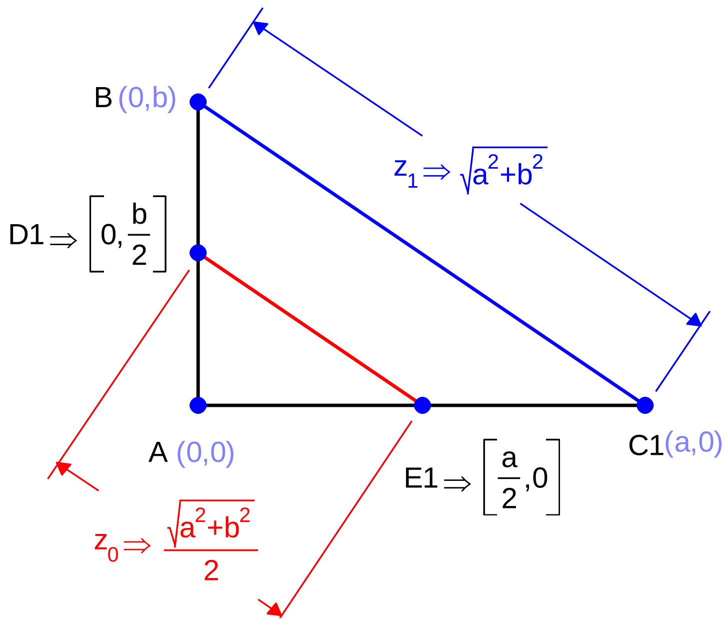
```
BC = Distancia[B, C1]
```

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{BC}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Al dividir entre dos la longitud del segmento BC, obtenemos el mismo valor que el obtenido para DE.


B (0,b)
$z_1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}$
$D1 \Rightarrow \left[0, \frac{b}{2}\right]$
A (0,0)
C1(a,0)
$E1 \Rightarrow \left[\frac{a}{2}, 0\right]$
$z_0 \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

LA RECTA

Definición de recta

La recta se define como el lugar geométrico de los puntos tales que si se toman dos, cualquiera de ellos, la razón entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia entre las abscisas es constante:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = constante$$

Pendiente de una recta

La pendiente *m* de una recta es la tangente del ángulo de inclinación:

$m = \tan(\theta)$

TEOREMA

Una recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, donde $x_1 \neq x_2$, tiene pendiente:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_{12} - x_1}$

Observación

1. Si las ordenadas de los puntos son iguales, la recta es paralela al eje X y su pendiente es cero.
2. Si las abscisas de los puntos son iguales, la recta es paralela al eje Y y su pendiente es infinita.

Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados

TEOREMA

La ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), donde $x_2 \neq x_1$ está dada por:

$$y - y_2 = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})(x - x_2)$$

Ejemplo

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P1 (-10, -5) y P2 (0, 5); graficar la ecuación obtenida, calcular su pendiente y ángulo de inclinación.

Solución

Definición numérica de los puntos:

```
P1 = {-10, -5}; P2 = {0, 5};
```

Definición de la pendiente de la recta:

```
m[A_, B_] := (B[[2]] - A[[2]]) / (B[[1]] - A[[1]])
```

Definición de la recta dada su pendiente y uno de sus puntos:

```
recta[A_, B_, x_] := m[A, B] (x - A[[1]]) + A[[2]]
```

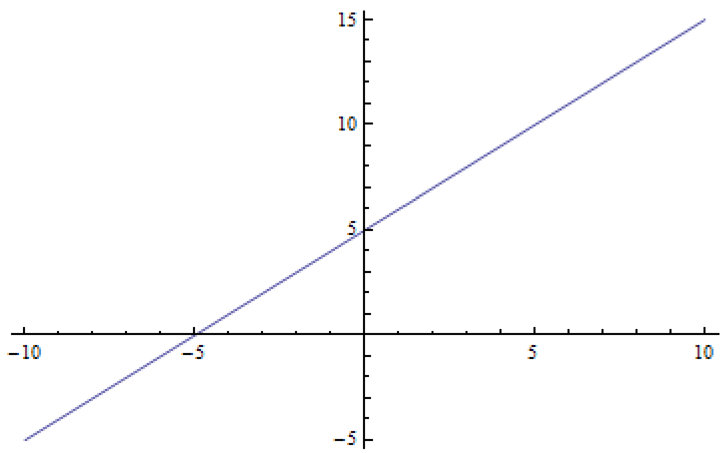
Cálculo de la ecuación simbólica de la recta:

```
l1 = recta[P1, P2, x]
```

```
5 + x
```

Graficar la función:

```
Plot[l1, {x, -10, 10}]
```



Cálculo de la pendiente y ángulo de inclinación:

```
pendiente = m[P1, P2]
```

```
1
```

```
ArcTan[pendiente]
```

$\frac{\pi}{4}$

$\text{ArcTan[pendiente]}\ \frac{180}{\pi}$

```
45
```

Ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (4, -1) y tiene un ángulo de inclinación de 135 grados.

Solución

Definir una fórmula para calcular la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada:

```
Recta[P_, m_] := m (x - P[[1]]) + P[[2]]
```

Calcular la pendiente de la recta:

```
Pendiente = 135 * Pi/180
```

$\frac{3\pi}{4}$

```
m = Tan[Pendiente]
```

-1

Calcular la ecuación de la recta:

```
A = {4, -1}
```

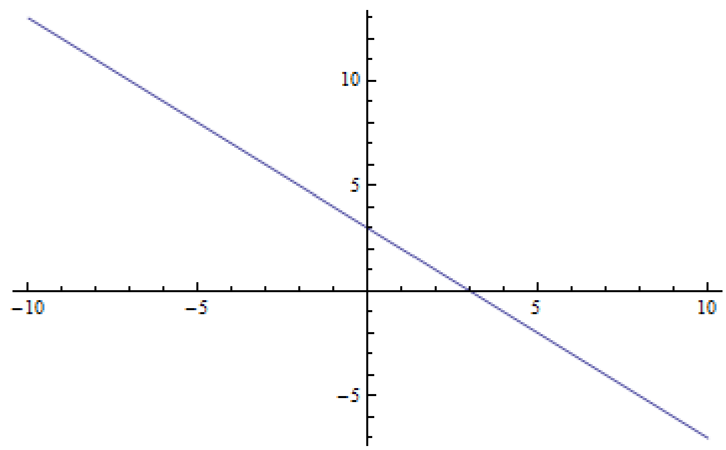
{4, -1}

```
Recta1 = Recta[A, m]
```

3 - x

Gráfica de la recta

```
Plot[Recta1, {x, -10, 10}]
```



Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada al origen

TEOREMA

La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b tiene por ecuación

$$y = m\,x + b$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta con pendiente *m = 1* y con ordenada en el origen *b =-5*. Graficar la ecuación encontrada y calcular el grado de inclinación de su pendiente

Solución

Definir la fórmula para calcular la ecuación de la recta en términos de m, b y x:

```
Recta[m_, b_, x_] := m x + b
```

Calcular la ecuación:

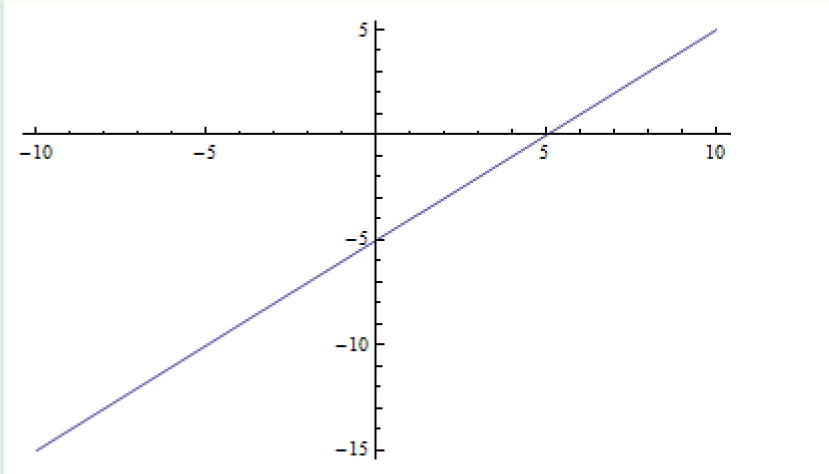
```
m = 1; b = -5;
```

```
Recta1 = Recta[m, b, x]
```

```
-5 + x
```

Gráfica de la ecuación:

```
Plot[Recta1, {x, -10, 10}]
```



Calcular el ángulo de pendiente de la recta:

$$Angulo = ArcTan[m] * \frac{180}{Pi}$$

```
45
```

Ejercicio de manipulación de la recta punto-pendiente.

Definir la función:

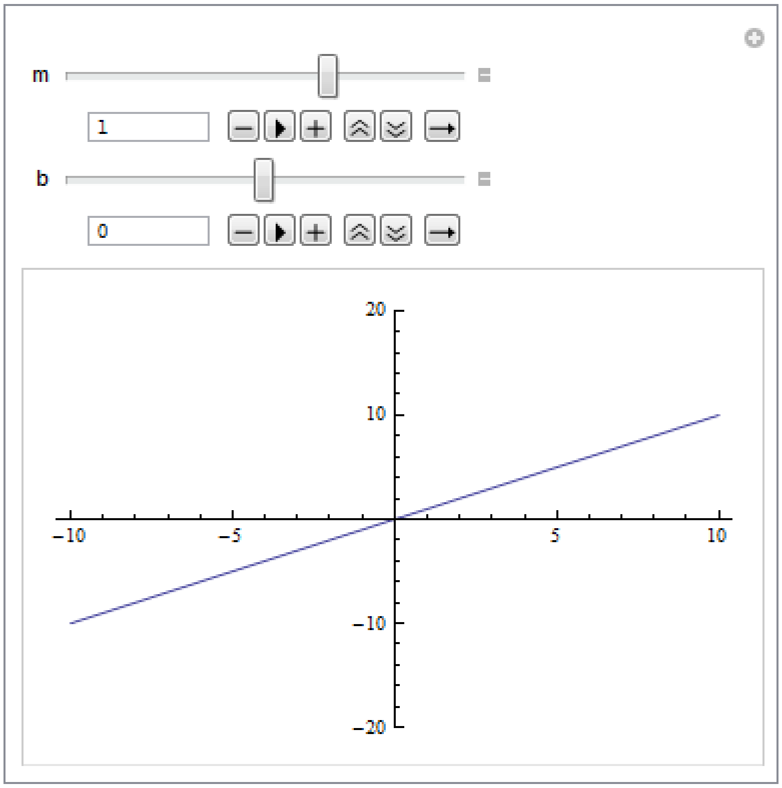
```
Recta[m_, b_, x_] := m x + b
```

Definir la función de manipulación con los siguientes parámetros:

Pendiente m: desde -3 a 3, con incrementos de 1.

Ordenada al origen b: desde -5 a 5, con incrementos de 1.

```
Manipulate[Plot[Recta[m, b, x], {x, -10, 10},
  PlotRange → 20],
 {m, -3, 3, 1}, {b, -5, 5, 1}]
```



Ecuación simétrica de la recta

TEOREMA

La recta cuyas intercepciones con los ejes X y Y son $a \neq 0$ y $b \neq 0$, respectivamente, tiene por ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta cuyas intercepciones con los ejes X y Y son, respectivamente, 3 y 5. Graficar la ecuación encontrada.

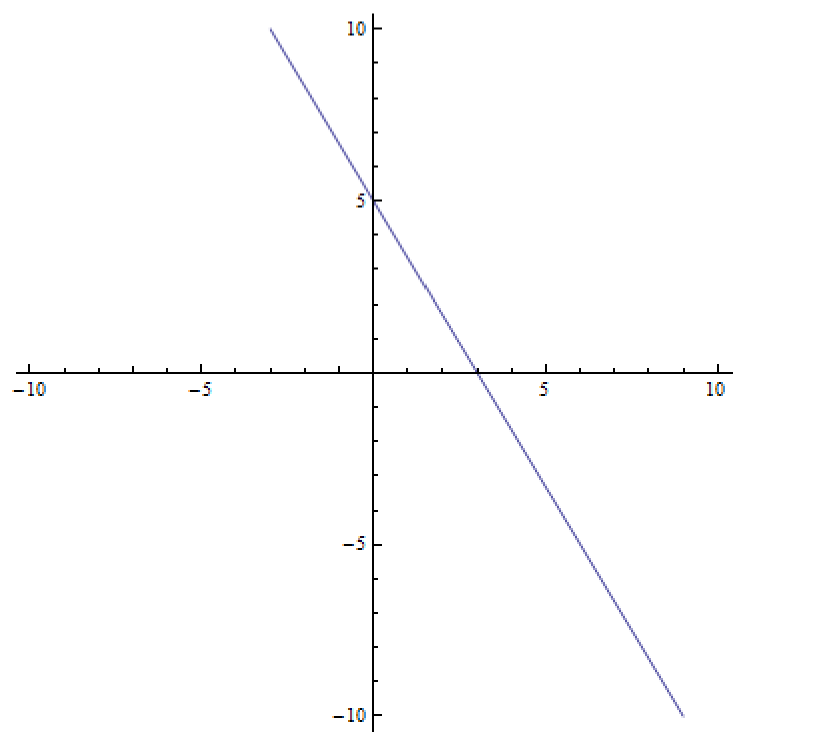
Solución

```
a = 3;
b = 5;
x/a + y/b == 1
```

```
x/3 + y/5 == 1
```

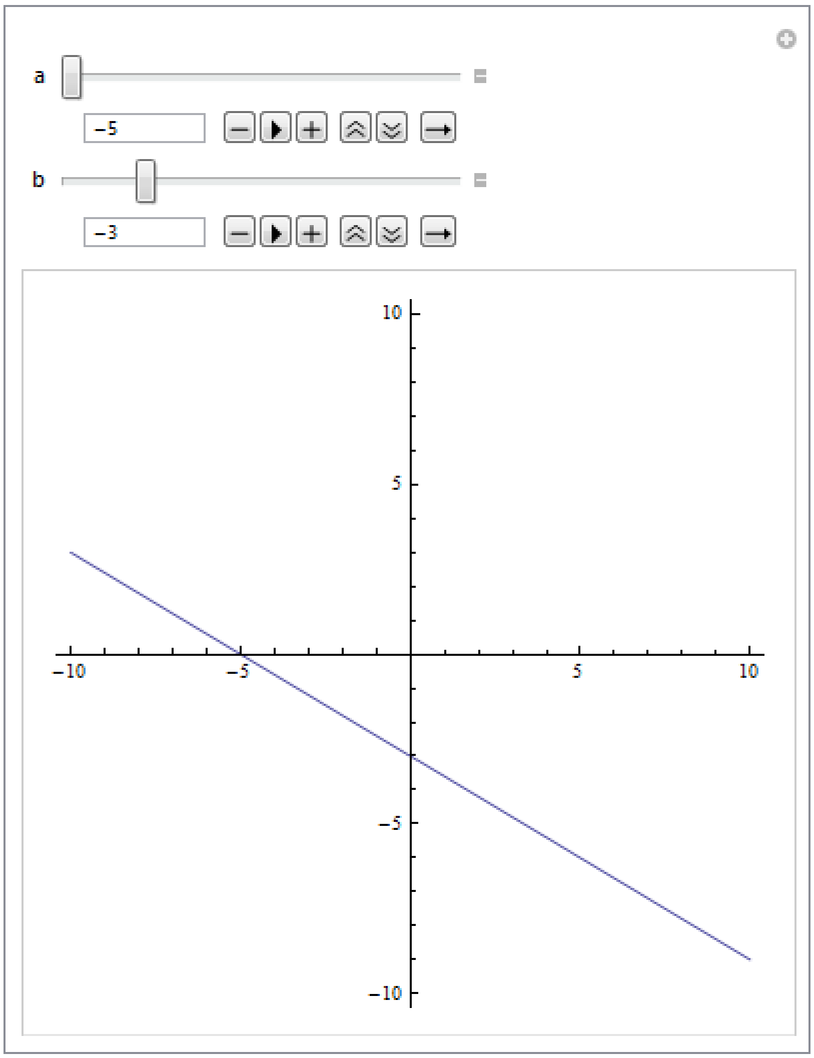
Graficar la ecuación:

```
ContourPlot[x/3 + y/5 == 1, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
 Axes → True, Frame → False]
```



Generalizar la solución

```
Manipulate[ContourPlot[x/a + y/b == 1, {x, -10, 10},
  {y, -10, 10}, Axes → True, Frame → False],
 {a, -5, 5, 1}, {b, -5, 5, 1}]
```



Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta cuyas intercepciones con los ejes X y Y son, respectivamente, 4 y 2. Calcular su pendiente y graficar la ecuación encontrada.

Solución

Definir una fórmula para calcular la ecuación de una recta dados sus puntos de intersección con los ejes:

$$\text{Recta}[a\_,\ b\_,\ x] := \frac{-b\,x + a\,b}{a}$$

Calcular la ecuación pedida:

```
a = 4; b = 2;
```

```
Recta1 = Recta[a, b, x]
```

$$\frac{1}{4}(8 - 2\,x)$$

La pendiente de la recta viene dado por el coeficiente de la X en la recta encontrada:

```
Pendiente = Coefficient[Recta1, x]
```

$$-\frac{1}{2}$$

Calcular el ángulo correspondiente a este ángulo (el ángulo obtenido es el comprendido entre el eje de las X y la recta):

$$\text{Angulo} = \text{ArcTan}[\text{Pendiente}]\,\frac{180}{\text{Pi}}$$

$$-\frac{180\,\text{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\right]}{\pi}$$

Convertir el resultado simbólico obtenido a resultado numérico con una precisión de seis cifras.

```
Angulo = N[Angulo, 6]
```

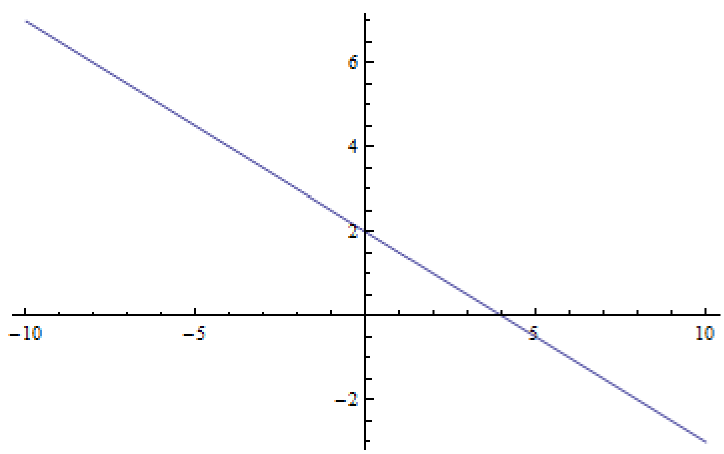
```
-26.5651
```

```
180 + Angulo
```

```
153.4349
```

Gráfica de la ecuación:

```
Plot[Recta1, {x, -10, 10}]
```



Rectas paralelas

TEOREMA

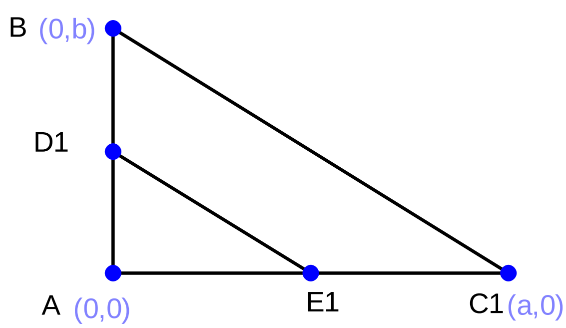
Dos rectas no verticales distintas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales:

$$m_1 = m_2.$$

Ejemplo

Demostrar analíticamente que el segmento que une los puntos medios de los dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.

Solución



Definir una fórmula para el cálculo de la pendiente:

```
m[A_, B_] := (B[[2]] - A[[2]]) / (B[[1]] - A[[1]])
```

Calcular las pendientes de los segmentos D1E1 y BC1:

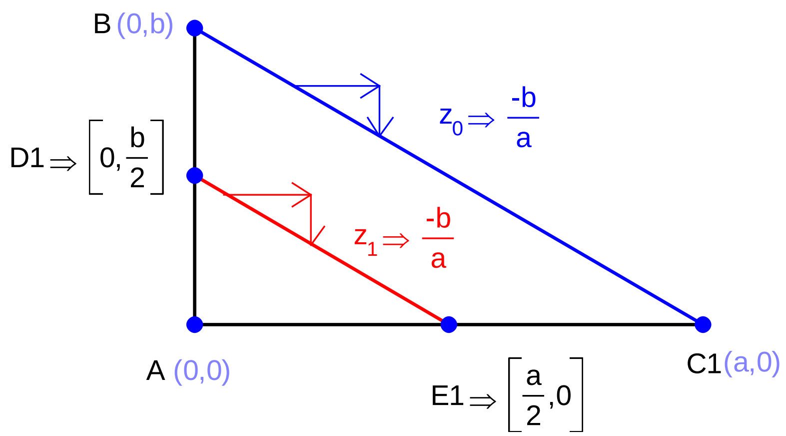
```
mD1E1 = m[D1, E1]
```

$-\frac{b}{a}$

```
mBC1 = m[B, C1]
```

$-\frac{b}{a}$

Las pendientes de los dos segmentos son iguales.



Rectas perpendiculares

TEOREMA

Dos rectas no verticales distintas son perpendiculares son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1:

$$m_1 m_2 = -1 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ejemplo

Una recta pasa por el punto (3, -6) y es perpendicular a la recta definida por los puntos A (4, 1) y B (2, 5). Encontrar las ecuaciones de estas dos rectas y el punto donde se cortan.

Solución

Definir una fórmula para calcular la ecuación de una recta dados dos de sus puntos:

```
recta[A_, B_, x_] := (B[[2]] - A[[2]])/(B[[1]] - A[[1]]) (x - A[[1]]) + A[[2]]
```

Definir los puntos dados y calcular la ecuación:

```
A = {4, 1};
B = {2, 5};
```

```
l1 = recta[A, B, x] == y
1 - 2 (-4 + x) == y
```

```
l1 = Simplify[l1]
2 x + y == 9
```

Definir una fórmula para calcular la pendiente de la recta:

```
m[A_, B_] := (B[[2]] - A[[2]])/(B[[1]] - A[[1]])
```

Calcular la pendiente de la recta:

```
pendientel1 = m[A, B]
```

```
-2
```

Con la pendiente encontrada calcular la pendiente de la línea perpendicular.

Definir una fórmula para encontrar la ecuación de una recta dados uno de sus puntos y su pendiente:

```
recta2[A_, m_, x_] := m (x - A[[1]]) + A[[2]]
```

Calcular la pendiente recíproca:

```
C1 = {3, -6};
pendientel2 = -1 / pendientel1
```

$$\frac{1}{2}$$

Calcular la ecuación de la recta:

```
l2 = recta2[C1, pendientel2, x] == y
```

$$-6 + \frac{1}{2}(-3 + x) == y$$

```
l2 = Simplify[l2]
```

```
x == 15 + 2 y
```

Encontrar la intersección entre las dos rectas:

```
solucion = Solve[{l1, l2}, {x, y}]
```

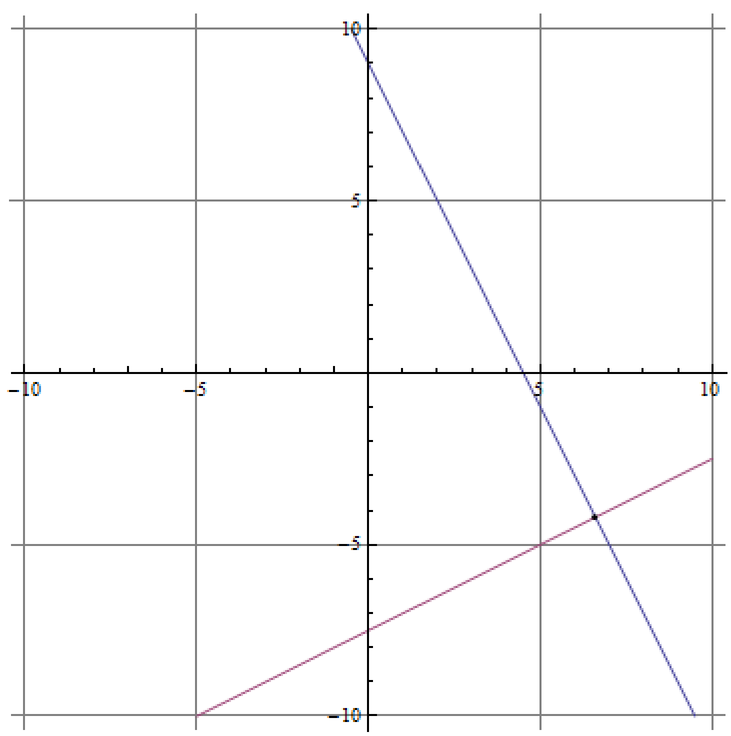
$\left\{\left\{x \to \frac{33}{5}, y \to -\frac{21}{5}\right\}\right\}$

```
interseccion = ReplaceAll[{x, y}, solucion]
```

$\left\{\frac{33}{5}, -\frac{21}{5}\right\}$

Graficar las ecuaciones implícitas encontradas y dibujar el punto de intersección:

```
ContourPlot[{2 x + y == 9, x == 15 + 2 y}, {x, -10, 10},
 {y, -10, 10}, Axes → True, Frame → False,
 GridLines → Automatic, Epilog → Point[interseccion]]
```



Distancia de un punto a una recta

TEOREMA

La distancia del punto $P\ (x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ es:

$$Distancia = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo

Encontrar la distancia del punto (2, 2,) a la recta x + y = 1. Graficar la recta y el punto.

Solución 1

Definir una fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta:

```
distanciaPuntoRecta[A_, B_, C_, x1_, y1_] :=
  Abs[(A x1 + B y1 + C)/Sqrt[A^2 + B^2]]
```

Definir los valores de las coordenadas del punto (2, 2) y los valores de A, B y C a partir de la ecuación $x + y - 1 = 0$:

```
x1 = 2; y1 = 2;
A = 1; B = 1; C1 = -1;
```

Sustituir estos valores en la fórmula para calcular la distancia.

Valor exacto:

```
distanciaPuntoRecta[A, B, C1, x1, y1]
```

$$\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Valor aproximado:

```
distanciaPuntoRecta[A, B, C1, x1, y1] // N
2.12132
```

Solución 2

Definir el punto P (2, 2):

```
P = {2, 2};
x1 = P[[1]]; y1 = P[[2]];
```

Almacenar la ecuación dada en la variable *l1*:

```
l1 = x + y - 1
```

```
-1 + x + y
```

Calcular los coeficientes a partir de *l1*.

```
A = Coefficient[ l1, x]
```

```
1
```

```
B = Coefficient[ l1, y]
```

```
1
```

```
C1 = Coefficient[ l1, x, 0]
```

```
-1 + y
```

```
C1 = Coefficient[C1, y, 0]
```

```
-1
```

Calcular la distancia con los valores obtenidos:

```
distanciaPuntoRecta[A, B, C1, x1, y1]
```

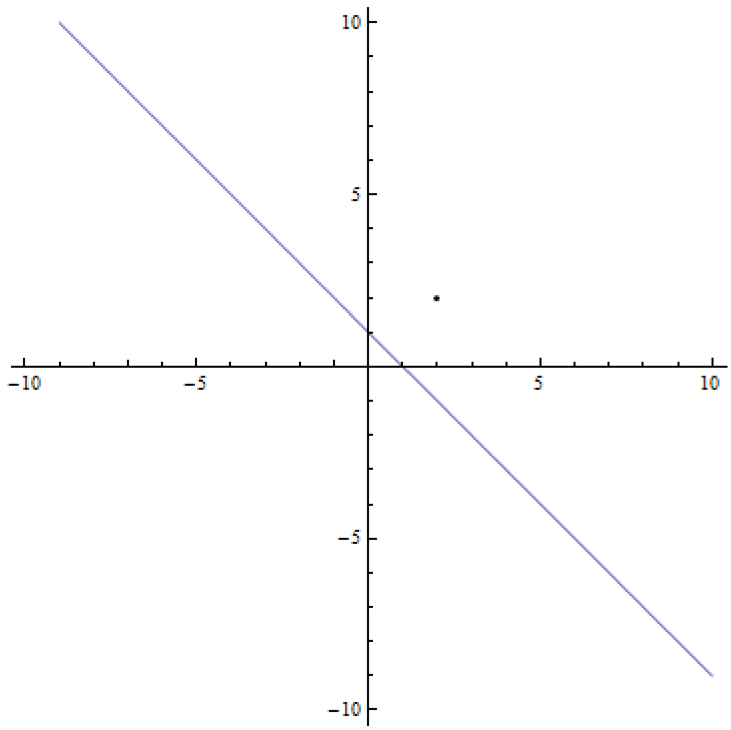
$$\frac{3}{\sqrt{2}}$$

```
distanciaPuntoRecta[A, B, C1, x1, y1] // N
```

```
2.12132
```

Graficar la ecuación y el punto:

```
ContourPlot[l1 == 0, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
 Axes → True, Frame → False, Epilog → {Point[P]}]
```

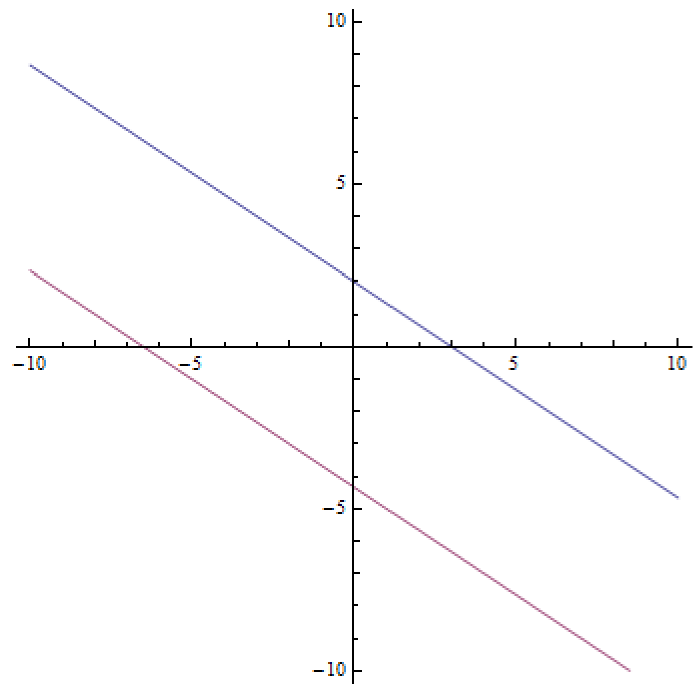


Ejemplo

Calcular la distancia entre las rectas 2 x + 3y -6 = 0 y 2 x + 3y + 13 = 0.

Solución

```
ContourPlot[{2 x + 3 y - 6 == 0, 2 x + 3 y + 13 == 0} ,
 {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, Axes → True,
 Frame → False]
```



Buscar un punto sobre algunas de las rectas.

¿Cuál es el valor de x cuando y vale cero?

```
p1 = ReplaceAll[2 x + 3 y - 6 == 0, y → 0]
```

```
-6 + 2 x == 0
```

```
Solve[p1]
```

```
{{x → 3}}
```

Definir los valores del punto encontrado:

```
x1 = 3; y1 = 0;
```

Definir los valores para A, B y C para la segunda ecuación:

$2x + 3y + 13 == 0$

```
A = 2; B = 3; C1 = 13;
```

Calcular la distancia entre las dos rectas:

```
distanciaPuntoRecta[A, B, C1, x1, y1]
```

$$\frac{19}{\sqrt{13}}$$

Ejemplo

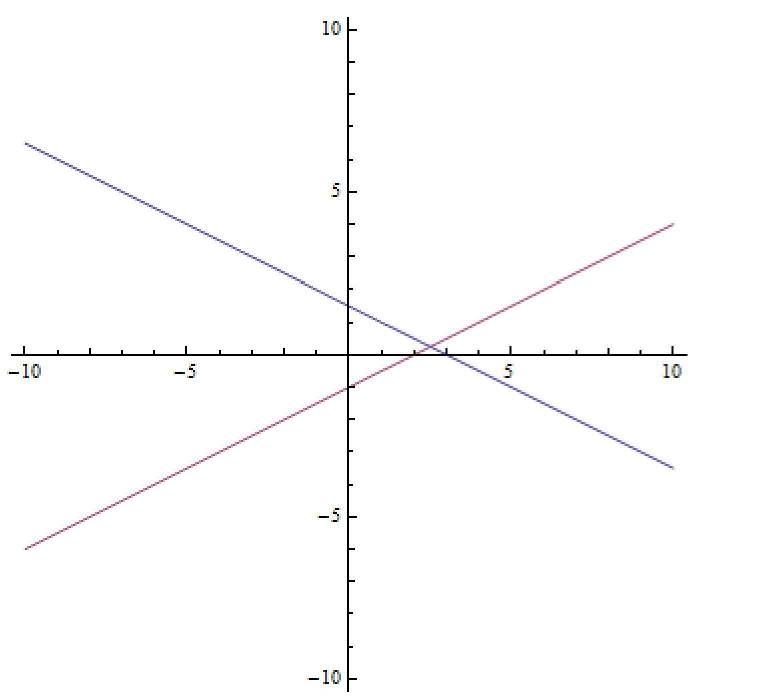
Encontrar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por:

$x + 2y - 3 = 0$

$x - 2y - 2 = 0$

Solución

```
ContourPlot[{x + 2 y - 3 == 0, x - 2 y - 2 == 0} ,
 {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, Axes → True,
 Frame → False]
```



Calcular la primera bisectriz.

Distancia de un punto P a la recta 1 = distancia del punto P a la recta 2:

$$l1 = \frac{x + 2y - 3}{\sqrt{1^1 + 2^2}} - \frac{x - 2y - 2}{\sqrt{1^1 + 2^2}} == 0$$

$$-\frac{-2 + x - 2y}{\sqrt{5}} + \frac{-3 + x + 2y}{\sqrt{5}} == 0$$

Simplificar el resultado obtenido:

```
Simplify[l1]
```

$4\,y == 1$

Calcular la segunda bisectriz.

Distancia de un punto P’ a la recta 1 = - distancia del punto P’ a la recta 2:

$$l2 = \frac{x + 2\,y - 3}{\sqrt{1^1 + 2^2}} + \frac{x - 2\,y - 2}{\sqrt{1^1 + 2^2}} == 0$$

$$\frac{-2 + x - 2\,y}{\sqrt{5}} + \frac{-3 + x + 2\,y}{\sqrt{5}} == 0$$

Simplificar el resultado obtenido:

```
Simplify[l2]
```

$2\,x == 5$

Graficar las dos líneas dadas y sus bisectrices:

```
ContourPlot[{x + 2 y - 3 == 0, x - 2 y - 2 == 0, 4 y == 1,
  2 x == 5} , {x, -10, 10}, {y, -3, 3}, Axes → True,
 Frame → False]
```