Ricardo Villafaña Figueroa
inn-edu.com
ricardo.villafana@gmail.com

Introducción al Cálculo Simbólico a través de Maple

Geometría: Baricentro de un triángulo

Mediana: recta que pasa por el vértice y por el punto medio del lado opuesto.

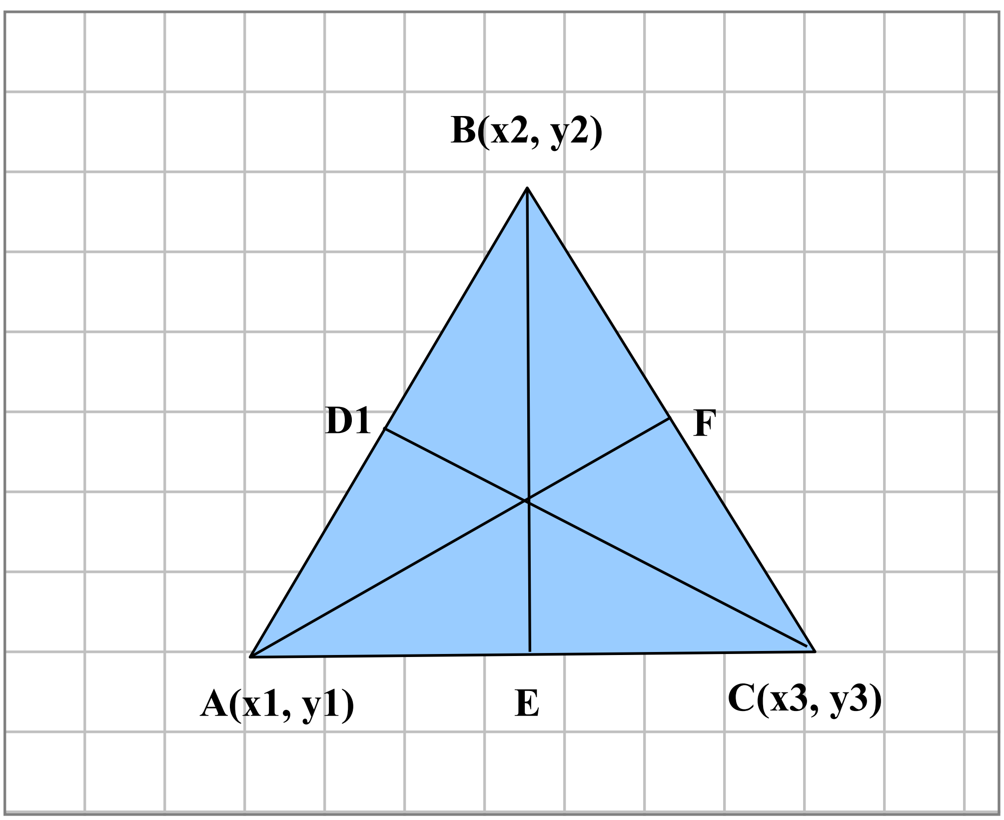
Baricentro: punto de intersección de las medianas de un triángulo.

Ejemplo

Demostrar que si un triángulo tiene los vértices en $A(x1, y1)$, $B(x2, y2)$, $C(x3, y3)$, el punto de intersección de sus medianas está en $\left(\frac{x1+x2+x3}{3}, \frac{y1+y2+y3}{3}\right)$

Para este ejercicio, tome en cuenta que las medianas del triángulo concurren en un punto que está a dos tercios de la distancia de cada vértice a la mitad de su lado opuesto.

Solución



Definir una fórmula para calcular el punto medio entre dos puntos dados:

$$PuntoMedio := (P, \mathrm{Q}) \rightarrow \left[\frac{P_1 + Q_1}{2}, \frac{P_2 + Q_2}{2}\right]:$$

Definir la fórmula que calcula el punto de división de un segmento en una razón dada:

$$PuntoRazon := (A, B, r) \rightarrow \begin{bmatrix} A_1 + r \cdot (B_1 - A_1) \\ A_2 + r \cdot (B_2 - A_2) \end{bmatrix}:$$

Definir los tres puntos dados:

$$A := [\mathrm{x1}, \mathrm{y1}] : B := [\mathrm{x2}, \mathrm{y2}] : C := [\mathrm{x3}, \mathrm{y3}] :$$

Calcular cada uno de los puntos medios de los lados de la figura dada:

$$D1 := PuntoMedio(A, B)$$

$$\left[\frac{1}{2}\, x1 + \frac{1}{2}\, x2, \frac{1}{2}\, y1 + \frac{1}{2}\, y2\right]$$

$$E := PuntoMedio(A, C)$$

$$\left[\frac{1}{2}\, x1 + \frac{1}{2}\, x3, \frac{1}{2}\, y1 + \frac{1}{2}\, y3\right]$$

$$F := PuntoMedio(B, C)$$

$$\left[\frac{1}{2}\, x2 + \frac{1}{2}\, x3, \frac{1}{2}\, y2 + \frac{1}{2}\, y3\right]$$

Calcular las coordenadas del punto que se encuentra a 2/3 del vértice de A (segmento AF)

$$PuntoRazon\left(A, F, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\, x1 + \frac{1}{3}\, x2 + \frac{1}{3}\, x3 \\ \frac{1}{3}\, y1 + \frac{1}{3}\, y2 + \frac{1}{3}\, y3 \end{bmatrix}$$

Calcular las coordenadas del punto que se encuentra a 2/3 del vértice de B (segmento BE)

$$PuntoRazon\left(B, E, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\,x1 + \frac{1}{3}\,x2 + \frac{1}{3}\,x3 \\ \frac{1}{3}\,y1 + \frac{1}{3}\,y2 + \frac{1}{3}\,y3 \end{bmatrix}$$

Calcular las coordenadas del punto que se encuentra a 2/3 del vértice de C (segmento CD1)

$$PuntoRazon\left(\mathrm{C},\ \mathrm{D1},\ \frac{2}{3}\right)$$

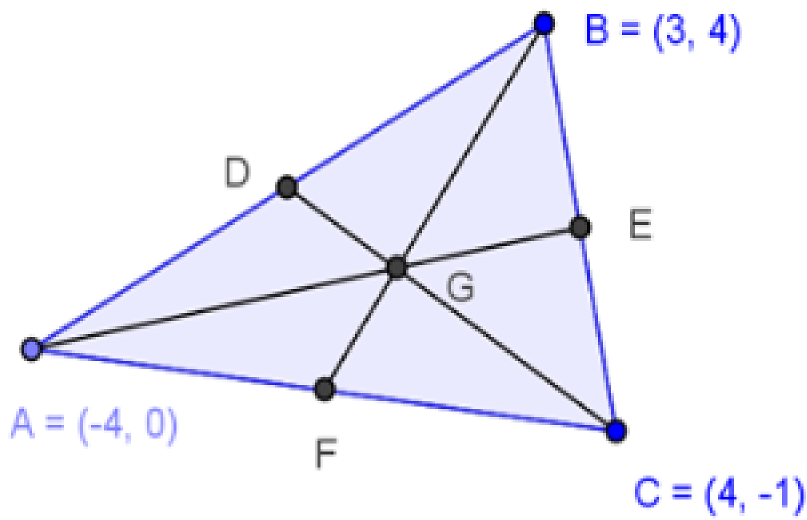
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\,x1 + \frac{1}{3}\,x2 + \frac{1}{3}\,x3 \\ \frac{1}{3}\,y1 + \frac{1}{3}\,y2 + \frac{1}{3}\,y3 \end{bmatrix}$$

Las coordenadas del punto de intersección de los segmentos AF, BE y CD1 son iguales.

Ejemplo

Los vértices de un triángulo son los siguientes: A (-4, 0), B (3, 4) y C (4, -1). Encontrar el baricentro del triángulo.

Solución 1



Representación visual del problema (Geogebra):

Definir una función para encontrar el punto medio entre dos puntos dados:

$$PuntoMedio := (P, \mathrm{Q}) \rightarrow \left[\frac{P_1 + Q_1}{2}, \frac{P_2 + Q_2}{2}\right]:$$

Definir la fórmula para calcular la ecuación de una línea recta dados dos puntos:

$$\mathrm{linea} := (A, B, x) \rightarrow \frac{B_2 - A_2}{B_1 - A_1} \cdot (x - A_1) + A_2$$

$$(A, B, x) \rightarrow \frac{(B_2 - A_2)\ (x - A_1)}{B_1 - A_1} + A_2$$

Definir los tres puntos que determinan el triángulo:

$$A := [-4, 0] : B := [3, 4] : C := [4, -1] :$$

Calcular los puntos medios de los lados AB y AC:

$$\mathrm{D1} := \mathrm{PuntoMedio}(\mathrm{A, B})$$

$$\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

$E := \text{PuntoMedio}(B, C)$

$$\left[\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$F := \text{PuntoMedio}(A, C)$

$$\left[0, -\frac{1}{2}\right]$$

Calcular las ecuaciones de las mediatrices:

$l1 := linea(A, E, x) = y$

$$\frac{1}{5}\,x + \frac{4}{5} = y$$

$l2 := linea(B, F, x) = y$

$$\frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2} = y$$

$l3 := linea(C, D1, x) = y$

$$-\frac{2}{3}\,x + \frac{5}{3} = y$$

Calcular el punto de intersección (baricentro/ centroide) de dos de las mediatrices:

$solve(\{l1, l2\}, [x, y])$

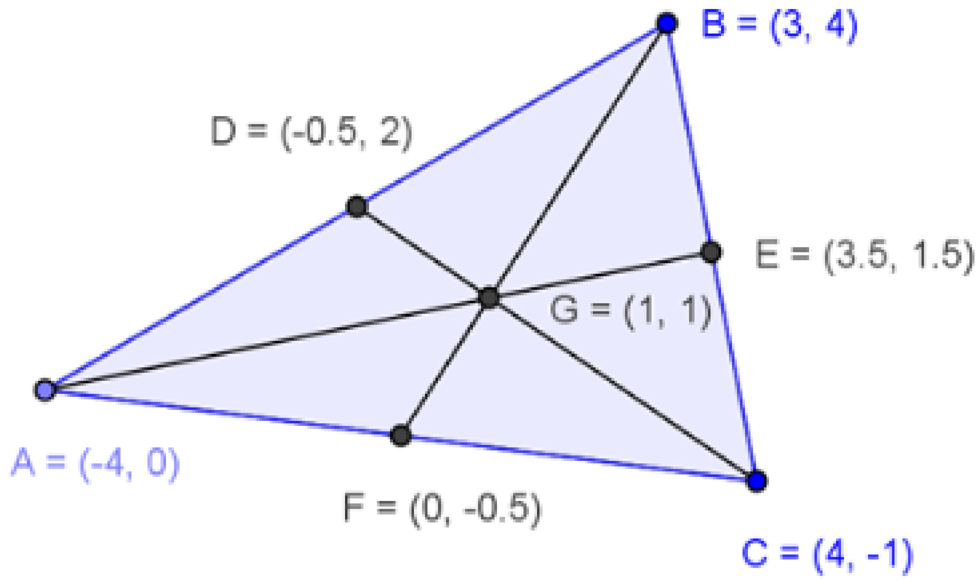
$$[[x = 1, y = 1]]$$

$solve(\{l1, l3\}, [x, y])$

$$[[x = 1, y = 1]]$$

$solve(\{l2, l3\}, [x, y])$

$$[[x = 1, y = 1]]$$



Representación gráfica de la solución dada por Geogebra.

Solución 2

Sabiendo que la intersección de la medianas está en $\left(\frac{x1+x2+x3}{3}, \frac{y1+y2+y3}{3}\right)$:

Definir una fórmula para calcular la intersección de las medianas:	$Baricentro := (\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) \rightarrow \left[\begin{array}{cc} \frac{P_1+Q_1+R_1}{3} & \frac{P_2+Q_2+R_2}{3} \end{array}\right]:$
Definir los tres puntos dados:	$A := [-4, 0] : B := [3, 4] : C := [4, -1] :$
Calcular el baricentro:	$Baricentro(A, B, C)$
	$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right]$