Ricardo Villafaña Figueroa
inn-edu.com
ricardo.villafana@gmail.com

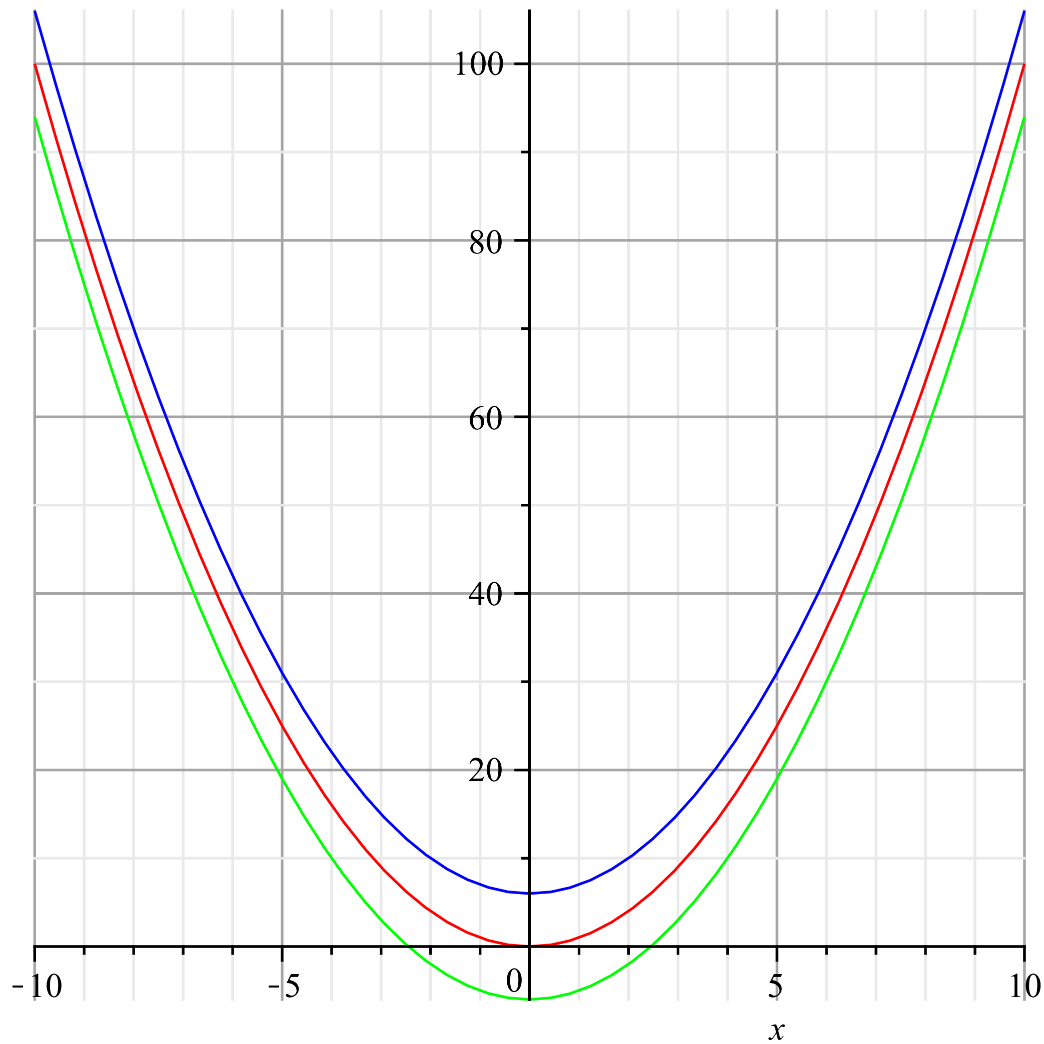
Introducción al Cálculo Simbólico a través de Maple

A manera de introducción, podemos decir que los lenguajes computacionales de cálculo simbólico son aquellos que permiten la representación y el manejo computacional de expresiones algebraicas.	$3(x+2)=3x+6$ $(x^2)^2=x^4$
Los lenguajes de cálculo simbólico trabajan con variables o letras tal como lo haría un profesor en un pizarrón o en notas de clases para demostrar algún teorema o derivar alguna fórmula matemática.	$3x^2+2x^2+3x-x=5x^2+2x$ $area := \frac{base \cdot altura}{2}$
Su capacidad de cálculo se puede observar en la facilidad con que realizan operaciones algebraicas básicas como son: suma, resta, multiplicación, división y potenciación de monomios y polinomios.	$\frac{2x^2}{4x^3}=\frac{1}{2x}$
Así mismo, tienen capacidades de simplificación, factorización y expansión de expresiones algebraicas.	$\frac{x}{x-\frac{x}{x-1}} \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{x-1}{x-2}$ $4x^2+4x \cdot y+y^2 \overset{\text{factor}}{=} (2x+y)^2$
Esta amplia gama de facilidades permiten al profesor disponer de una calculadora algebraica para acelerar cálculos o una herramienta didáctica para explicar o ejemplificar conceptos teórico- prácticos del álgebra.	***El cálculo simbólico hace por el álgebra, por la trigonometría, por el cálculo y por el álgebra lineal lo que la calculadora científica hace por la aritmética.***

Además de las capacidades básicas mencionadas, los lenguajes de cálculo simbólico cuentan con una amplia gama de funciones matemáticas para solucionar sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales, encontrar raíces reales y complejas de polinomios.	$x^2 - 1 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x=1], [x=-1]]$ $\{2x+3y=16, 3x-7y=1\} \xrightarrow{\text{solve}}$ $\{x=5, y=2\}$
Cuentan con herramientas, notaciones y símbolos que amplían su uso en la trigonometría, en la geometría analítica y en el cálculo integral y diferencial; proporcionando con esto un contexto pedagógico muy amplio para la explicación conceptual del álgebra, sus herramientas y sus consecuentes aplicaciones en las matemáticas, en la ingeniería y en las ciencias.	$\sum_{x=1}^{5} x = 15$ $\prod_{x=1}^{5} x = 120$ $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = 3$ $\frac{d}{dx}\left(x^3 + 3x^2 + 5\right) = 3x^2 + 6x$ $\int 3x^2 + 6x \, dx = x^3 + 3x^2$

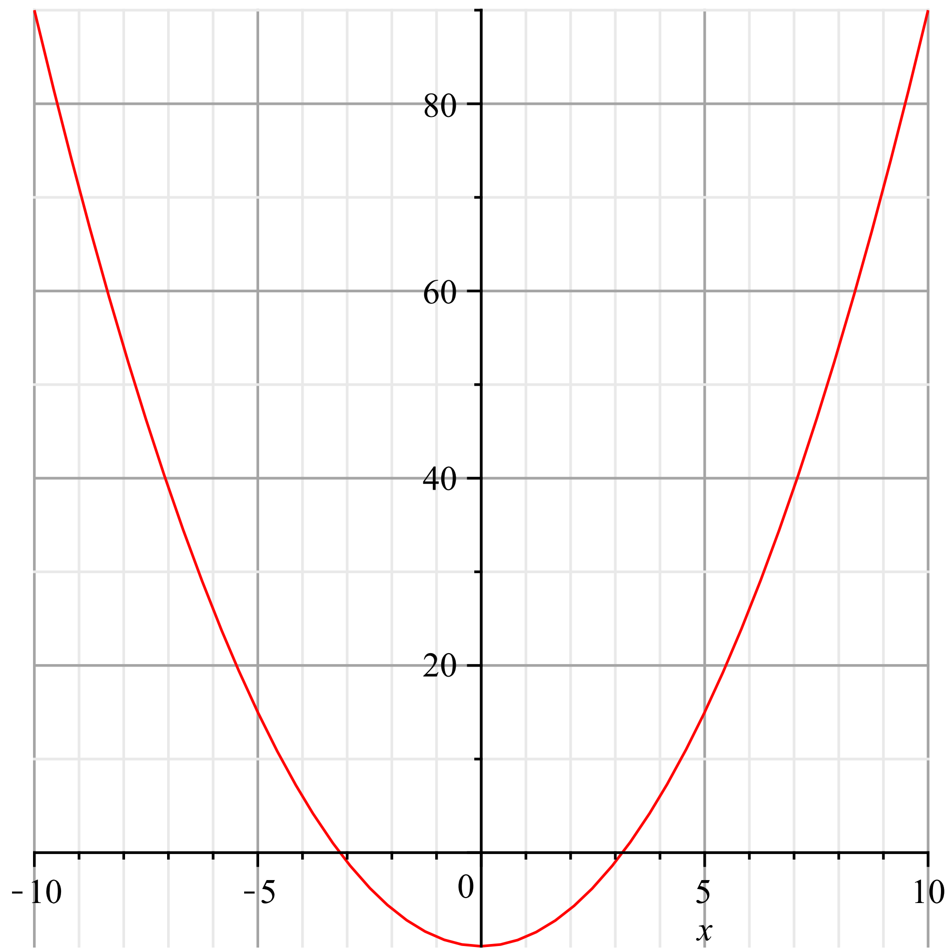
Los lenguajes simbólicos tienen la capacidad de generar gráficas a partir de funciones o representaciones algebraicas.

$x^2, x^2+6, x^2-6 \rightarrow$



Esta capacidad de graficación permite al estudiante comprender más fácilmente las relaciones subyacentes entre la estructura matemática y su representación visual, al mismo tiempo que hace posible que el estudiante derive expresiones matemáticas a través de la visualización de una gráfica o viceversa (apropiación visual).

La graficación también permite crear modelos cambiando el valor de los parámetros que generan las gráficas y con esto analizar y entender con mayor profundidad las relaciones entre cada parámetro y la gráfica que representa.

$a := 1 :$ $b := 0 :$ $c := -10 :$	$\mathrm{a} \cdot x^2 + \mathrm{b} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{c} \rightarrow$ 

La capacidad y flexibilidad de los lenguajes de cálculo simbólico se pueden ampliar continuamente a través de sus facilidades de programación y creación de bibliotecas de funciones matemáticas especializadas. Estas facilidades han hecho que lenguajes comerciales como Mathematica, Maple, Maxima y Mathcad se conviertan en verdaderos hitos de la computación moderna por sus amplias aplicaciones pedagógicas, de investigación y de aplicación en áreas tan diversas como la Biología, la Medicina, la Farmacia, la Genética y las Ciencias Jurídicas, entre otras.

Representación simbólica o algebraicas de expresiones matemáticas

En un lenguaje de cálculo simbólico se utilizan los mismos símbolos que en el álgebra tradicional: variables, constantes, operadores aritméticos, operadores lógicos, signos de igualdad, desigualdad, etc. Con estos operadores representamos y realizamos operaciones algebraicas.

Ejemplos de representaciones y operaciones algebraicas:

Sumas y restas:

$$3x + x = 4x$$

$$(3x + 6y) - (x - 5y) = 2x + 11y$$

Multiplicaciones y divisiones:

$$4(x + 2) = 4x + 8$$

$$\frac{3x}{6x \cdot y} = \frac{1}{2y}$$

Ecuaciones:

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \xrightarrow{\text{solución para } x} x = -5$$

Desigualdades:

$$x + 5 \leq 10 \xrightarrow{\text{solución para x}} [[x \leq 5]]$$

Resultados numéricos y simbólicos

Los lenguajes de cálculo simbólico tienen la capacidad de realizar tanto cálculos numéricos como simbólicos. Observe la diferencia en el cálculo de las siguientes expresiones:

	Cálculo numérico: solución aproximada	**Cálculo simbólico/ algebraico: solución exacta**
Fracciones	$2+\frac{1}{7} = 2.142857143$	$2+\frac{1}{7} = \frac{15}{7}$
Radicales	$\sqrt{50} = 7.071067810$	$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
Factoriales	$20! = 2.4329\ 10^{18}$	$20! = 2432902008176640000$

En el cálculo numérico tenemos soluciones *aproximadas*. En el cálculo simbólico tenemos soluciones *exactas*.

En el siguiente ejemplo se muestra el resultado simbólico (*exacto*) de $2+\frac{1}{7}$ y su resultado numérico aproximado a 50 decimales:

$$2+\frac{1}{7} = \frac{15}{7}$$

$$evalf[50]\left(2+\frac{1}{7}\right) = 2.1428571428571428571428571428571428571428571428571$$

La representación *exacta* del número pi:

$$\pi = \pi$$

El número pi con 100 decimales:

$$evalf[100](\pi) = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117068$$

Observe que los cálculos numéricos pueden llevarse prácticamente a *cualquier* precisión.

Nota.
La función *evalf* evalúa expresiones numéricas y permite precisar el número de dígitos o decimales a

utiizar en la evaluación.

Los lenguajes de cálculo simbólico como calculadora científica

Un lenguaje como Maple puede utilizarse como una calculadora científica:

Cálculos simples:	$3+5=8$
	$3.5\cdot 2=7.0$
Cálculos utilizando fórmulas o funciones:	$\sqrt{25}=5$
	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$
	$\log_{10}(5.0)=0.6989700043$
Cálculos complejos	$\frac{22.4\cdot 1000\cdot 6.24}{150}=931.8400000$
	$\frac{0.624}{6.70\cdot 10^{-2}}=9.313432836$

A continuación se muestran los principales operadores aritméticos y algunas de las funciones aritméticas-científicas de la biblioteca de Maple.

Operadores aritméticos

Suma	+
Resta	-
Multiplicación	*
División	/
Potencia	ˆ

Funciones de biblioteca:

Raíz cuadrada	$\mathrm{sqrt}(x)$	$\mathrm{sqrt}(25) = 5$
Valor absoluto	$\mathrm{abs}(x)$	$\mathrm{abs}(5) = 5$ $\mathrm{abs}(-5) = 5$
Signo	$\mathrm{signum}(x)$	$\mathrm{signum}(10) = 1$ $\mathrm{signum}(-10) = -1$ $\mathrm{signum}(0) = 0$

Parte entera	$\mathrm{floor}(x)$	$\mathrm{floor}(5.8) = 5$
Redondeo	$\mathrm{round}(x)$	$\mathrm{round}(5.8) = 6$ $\mathrm{round}(5.5) = 6$ $\mathrm{round}(5.2) = 5$
Parte fraccionaria	$\mathrm{frac}(x)$	$\mathrm{frac}(5.8) = 0.8$

Truncado de un número	$\mathrm{trunc}(x)$	$\mathrm{trunc}(5.8) = 5$
Menor de los enteros mayores del número dado	$\mathrm{ceil}(x)$	$\mathrm{ceil}(5.8) = 6$ $\mathrm{ceil}(5.5) = 6$ $\mathrm{ceil}(5.1) = 6$ $\mathrm{ceil}(-5.5) = -5$

Módulo (resto de la división entera de dos números dados)	$modp(x, y)$	$modp(7, 2) = 1$
Cociente entero (cociente de dos números dados)	$iquo(x, y)$	$iquo(7, 2) = 3$

Funciones trigonométricas

Seno	$\sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Coseno	$\cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Tangente	$\tan(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Cosecante	$\csc(x)$	$\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
Secante	$\sec(x)$	$\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
Cotangente	$\cot(x)$	$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Exponencial	$\exp(x)$	$\exp(10) = e^{10}$
Logaritmo neperiano	$\ln(x)$	$\ln(1) = 0$
Logaritmo natural	$\log[10](x)$	$\log[10](10) = 1$
Logaritmo en base b	$\log[b](x)$	$\log[4](2) = \frac{1}{2}$

Los lenguajes de cálculo simbólico como calculadora algebraica

Operaciones algebraicas básicas

De manera general, Maple realiza y simplifica automáticamente las siguientes expresiones:
- Sumas, productos, cocientes y potencias
- Números racionales expresados en forma fraccionaria
- Reducción de monomios semejantes
- Expresiones en los que pueda aplicarse la propiedad asociativa

Ejemplos de operaciones algebraicas básicas:

Suma y resta

$$3x + 2y + x - y = 4x + y$$

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{a} = \frac{4}{a}$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x = x$$

Multiplicación y división

$$3 \cdot (2x + 2) = 6x + 6$$

$$\frac{4y^2}{2y} = 2y$$

Potencias

$$(3x \cdot y^2)^2 = 9x^2y^4$$

$$\frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}$$

Combinación de operaciones

$$\frac{(3x \cdot y^2)^2}{9x} = xy^4$$

$$\frac{(3x \cdot y^2)^2}{9x} + x \cdot y^4 = 2xy^4$$

Operaciones/ transformaciones algebraicas avanzadas

Una expresión algebraica se puede representar de múltiples formas. Por ejemplo, la expresión $(x+y)^2$ se puede representar como $x^2+2\,x\,y+y^2$. Esta representación dependerá de la operación u operaciones que se deseen realizar con la expresión dada. Maple dispone de numerosas funciones para representar o *transformar* expresiones algebraicas. A continuación se muestran algunos ejemplos de estas funciones. Cada una de estas funciones se tratan con más detalle en la siguiente sección.

1. SImplificación (*simplify*)
2. Expansión (*simplify*)
3. Factorización (*factor*)
4. Descomposición en fracciones simples (*convert/ parfrac*)
5. Integración de fracciones bajo un denominador común (*convert/ confrac*):
6. Agrupación de términos con respecto a una variable (*collect*)
7. Combinación en un solo término sumas, productos o potencias (*combine/ radical/symbolic*)
8. Seleccionando partes de una expresión algebraica (*coeff/ degree*)

	Resultado devuelto sin el uso de la función	**Resultado devuelto con la función**
Simplificación algebraica (*simplify*):	$\frac{x^2+2\,x+1}{x+1} =$ $\frac{x^2+2\,x+1}{x+1}$ $\frac{x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$	$simplify\left(\frac{x^2+2\,x+1}{x+1}\right) = x+1$ $simplify\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2}\right) = \frac{x-1}{x+1}$
Expansión algebraica (*expand*):	$2\,x\cdot(2\,x-y) =$ $2\,x\,(2\,x-y)$ $(x+y)^3 = (x+y)^3$	$expand(2\,x\,(2\,x-y)) = 4\,x^2-2\,x\,y$ $expand\left((x+y)^3\right) =$ $x^3+3\,x^2\,y+3\,x\,y^2+y^3$
Factorización algebraica (*factor*):	$3x^3-2x^2-x =$ $3\,x^3-2\,x^2-x$ $x^2+2\,x\cdot y+y^2 =$ $x^2+2\,x\,y+y^2$	$factor\left(3x^3-x^2-x\right) = x\,(3\,x^2-x-1)$ $factor\left(x^2+2\,x\cdot y+y^2\right) = (x+y)^2$

Descomposición en fracciones simples (*convert/ parfrac*):	$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-1}$	$convert\left(\frac{1}{x^2-1}, parfrac, x\right)=$ $-\frac{1}{2\,(x+1)}+\frac{1}{2\,(x-1)}$ $convert\left(\frac{1}{x^3-x^2}, parfrac, x\right)=$ $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$

Integración de fracciones bajo un denominador común (*convert/ confrac*):	$-\frac{1}{2\,(x+1)}+\frac{1}{2\,(x-1)}=-\frac{1}{2\,x+2}+\frac{1}{2\,x-2}$ $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=$ $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$	$convert\left(-\frac{1}{2\,(x+1)}+\frac{1}{2\,(x-1)}, confrac, x\right)=\frac{1}{x^2-1}$ $convert\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}, confrac, x\right)=\frac{1}{x^3-x^2}$
Agrupación de términos con respecto a una variable(*collect*):	$expand\left(\left(\mathrm{x}-(y-3)^2\right)^2\right)$ $x^2-2\,x\,y^2+12\,x\,y-18\,x+y^4-12\,y^3+54\,y^2-108\,y+81$	$collect\left(expand\left(\left(\mathrm{x}-(y-3)^2\right)^2\right), x\right)$ $x^2+\left(-2\,y^2+12\,y-18\right)\,x+y^4-12\,y^3+54\,y^2-108\,y+81$ $collect\left(expand\left(\left(\mathrm{x}-(y-3)^2\right)^2\right), y\right)$ $y^4-12\,y^3+(-2\,x+54)\,y^2+(12\,x-108)\,y+x^2-18\,x+81$

Combinación en un solo término sumas, productos o potencias	$\sqrt{3}\,\sqrt{2}+\sqrt{y}\,\sqrt{x^2-1}$ $\sqrt{3}\,\sqrt{2}+\sqrt{y}\,\sqrt{x^2-1}$	$combine\left(\sqrt{3}\,\sqrt{2}+\sqrt{y}\,\sqrt{x^2-1},\ radical\right)$ $\sqrt{6}+\sqrt{y}\,\sqrt{x^2-1}$ $combine\left(\sqrt{3}\,\sqrt{2}+\sqrt{y}\,\sqrt{x^2-1},\ symbolic\right)$ $\sqrt{6}+\sqrt{y\,(x^2-1)}$

Seleccionando partes de una expresión algebraica

Coeficientes

Definir el polinomio:	$p := 3\,x^2 + 2\,x + 5:$
Coeficiente de la x elevado a la 2:	$coeff(p, \mathrm{x}, 2) = 3$
Coeficiente de la x elevado a la 1:	$coeff(p, \mathrm{x}, 1) = 2$
Coeficiente de la x elevado a la 0 (término independiente):	$coeff(p, \mathrm{x}, 0) = 5$
Todos los coeficientes:	$coeffs(p) = 5, 2, 3$

Exponentes (potencia mayor de una expresión algebraica)

Definir el polinomio:	$p := 3\,x^2 + 2\,x + 5:$
Exponente de p:	$degree(p) = 2$

Definir el polinomio:	$p := 3\,x^2 + 3y^3 + 5x^2 + y^2:$
Exponente de p:	$degree(p) = 3$
Exponente de la variable x:	$degree(p, x) = 2$
Exponente de la variable y:	$degree(p, y) = 3$

Simplificación de expresiones algebraicas (función *simplify*)

Transformaciones algebraicas para obtener la expresión más sencilla o simple de la expresión dada

Normalmente la simplificación de expresiones algebraicas se realiza de manera automática como se observa en los siguientes ejemplos:

$$3(x+2) = 3x+6$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x+1)} = x+1$$

$$\frac{2}{a}+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{5}{b} = \frac{4}{a}+\frac{7}{b}$$

Sin embargo, si intentamos simplificar la siguiente expresión tendríamos como resultado:

$$\frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

En estos casos es necesario utilizar el comando correspondiente de simplificación (*simplify*):

$$simplify\left(\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right) = x+1$$

Simplificación de cocientes algebraicos:

$$simplify\left(\frac{(1-a)^3}{a-1}\right) = -(a-1)^2$$

$$simplify\left(\frac{x^2-5x+6}{2a\cdot x-6a}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x-2}{a}$$

Simplificación de radicales:

$$simplify\left(\sqrt{3}\sqrt{6}\right) = 3\sqrt{2}$$

Simplificación de raíces anidadas con la función *radnormal*:

$$radnormal\left(\sqrt{6 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{2}}\right) = -1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Racionalización de expresiones con la función ***rationalize***:

$$rationalize\left(\frac{3}{\sqrt{2\,x}}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

$$rationalize\left(\frac{1}{2 + \sqrt{5}}\right) = -2 + \sqrt{5}$$

Expansión de expresiones algebraicas (función *expand*)

Multiplicación de productos y potencias

Observemos el siguiente ejemplo:

Multiplicación directa:

$3\,a\cdot(2\,a+b) = 3\,a\,(2\,a+b)$

Simplificación:

$simplify(3\,a(2\,a+b)) = 3\,a(2\,a+b)$

El método directo de la multiplicación y el método de la simplificación no desarrollan la expresión; la función *expand* sí lo hace:

$expand(3\,a\cdot(2\,a+b)) = 6\,a^2+3\,a\,b$

Veamos otros dos ejemplos de expansión algebraica:

$expand((a+b)(a+c)) = a(a+c)+b(a+c)$

$expand\left(3\,a\cdot\frac{a+b}{a^2}\right) = 3+\frac{3\,b}{a}$

Ejemplos de expansión algebraica aplicada a binomios y trinomios:

$expand\left((x+y)^3\right) = x^3+3\,x^2\,y+3\,x\,y^2+y^3$

$expand\left((x+y+z)^3\right) = x^3+3\,x^2\,y+3\,x^2\,z+3\,x\,y^2+6\,x\,y\,z+3\,x\,z^2+y^3+3\,y^2\,z+3\,y\,z^2+z^3$

Expansión con suposiciones (uso de la función *assume*)

Consideramos la expansión de la siguiente expresión:

$$expand\left(\sqrt{x^2}\right) = \sqrt{x^2}$$

Observamos que el comando expand no regresa el resultado esperado. Para resolver este problema, hay que proporcionarle al sistema de cálculo más información respecto al dominio de la X; en este caso, que considere como dominio del valor de X todos los valores mayores o iguales a cero. Esta suposición se logra con la función *assume*, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$assume(x \geq 0)$$

$$expand\left(\sqrt{x^2}\right) = x\sim$$

$$assume(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

$$expand\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2}\right) = x\sim + y\sim + z\sim$$

Expansión de un coeficiente en fracciones parciales (función *parfrac*)

El comando parfrac separa y simplifica un cociente polinomial en fracciones parciales

El intentar simplificar el cociente $\frac{1}{x^2-1}$ con el comando expand devuelve el siguiente resultado:

$$expand\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{1}{x\sim^2-1}$$

En este caso, es necesario utilizar la función *parfrac* con la función *convert* para obtener el resultado deseado:

$$convert\left(\frac{1}{x^2-1}, parfrac, x\right) = -\frac{1}{2\,(x\sim+1)} + \frac{1}{2\,(x\sim-1)}$$

$$convert\left(\frac{6}{3x^2-6\,x}, parfrac, x\right) = \frac{1}{x\sim-2} - \frac{1}{x\sim}$$

$$convert\left(\frac{\mathrm{x}^3-3\,x+2}{(x)^3-5x^2+3\,x+9}, parfrac, x\right) = 1 + \frac{1}{4\,(x\sim+1)} + \frac{19}{4\,(x\sim-3)} + \frac{5}{(x\sim-3)^2}$$

Factorización de expresiones algebraicas (función *factor*)

Reducción a productos o factores

El comando factor se utiliza para reducir expresiones algebraicas a productos o factores.

Factorización de polinomios:

$$factor(3a^3 - 6a^2) = 3\,a^2\,(a-2)$$

$$factor\left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{6}a^3\right) = \frac{1}{3}\,a^2\,(1+a)$$

Factorización de diferencia de cuadrados:

$$factor(x^2 - y^2) = (x-y)\,(x+y)$$

$$factor\left(\frac{1}{4}m^4 - n^2\right) = \frac{1}{4}\,(m^2 - 2\,n)\,(m^2 + 2\,n)$$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto:

$$factor(x^2 + 2\,x\cdot y + y^2) = (x+y)^2$$

$$factor(x^2 + 4\,x\cdot y + 4y^2) = (x+2\,y)^2$$

Factorización de un trinomio de la forma: $x^2 + b \cdot x + c$

$factor(x^2 + 7\,x + 10) = (x + 5)\,(x + 2)$

$factor(x^2 - 5\,x + 6) = (x - 2)\,(x - 3)$

Factorización de número enteros (función ifactor)

$ifactor(125) = (5)^3$

$ifactor(132) = (2)^2\,(3)\,(11)$

Solución de ecuaciones (función solve)

La función *solve* se utiliza para obtener las soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = 0$

$$solve(f(x), x)$$

$$solve(f, var)$$

Una solución

Resolver la ecuación $6x - 7 = 2x + 1$

$solve(6x - 7 = 2x + 1, x) = 2$

Resolver la ecuación $\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8}$

$solve\left(\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8}, x\right) = -\frac{5}{13}$

Dos soluciones

Resolver la ecuación
$x^2 - 7\,x + 10$

$solve(x^2 - 7\,x + 10, x)$

$$5, 2$$

Resolver la ecuación
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

$solve(a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, x)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{a}, -\frac{1}{2}\,\frac{b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{a}$$

Solución de un sistema de ecuaciones

solve({f1, f2, fn, () .. ()})

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con dos variables:

$$2x + 3y = 16$$
$$3x - 7y = 1$$

$solve(\{2x + 3y = 16, 3x - 7y = 1\})$

$$\{x = 5, y = 2\}$$

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con tres variables:

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + 2x = 5$$
$$x - y - 3x = 10$$

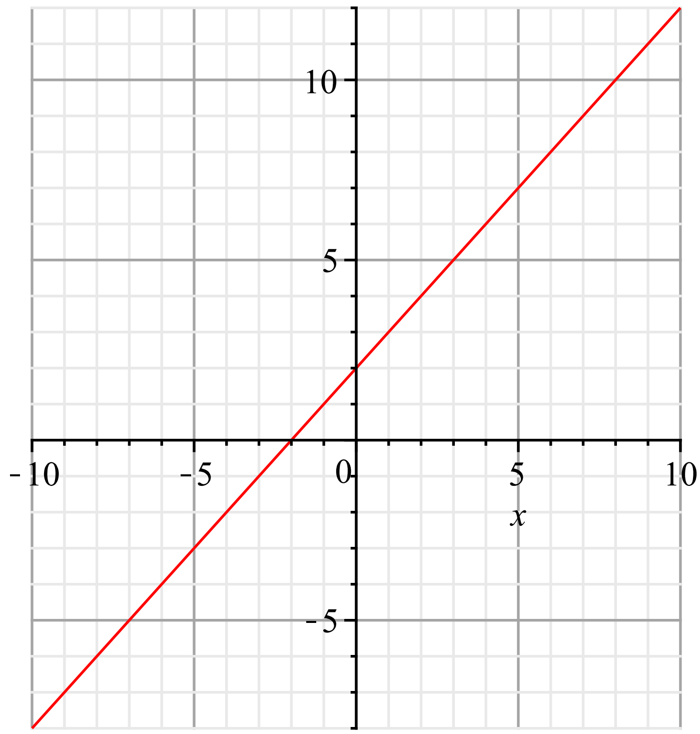
$solve(\{x + y + z = 6, x - y + 2x = 5, x - y - 3x = 10\})$

$$\{x = -1, y = -8, z = 15\}$$

Solución gráfica de ecuaciones

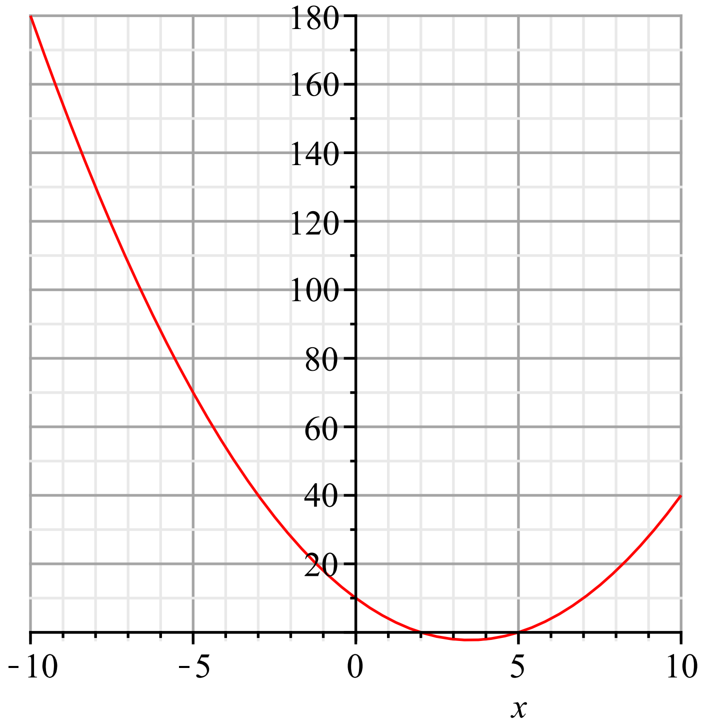
Encontrar la solución gráfica de la ecuación $x+2$

$x+2 \rightarrow$



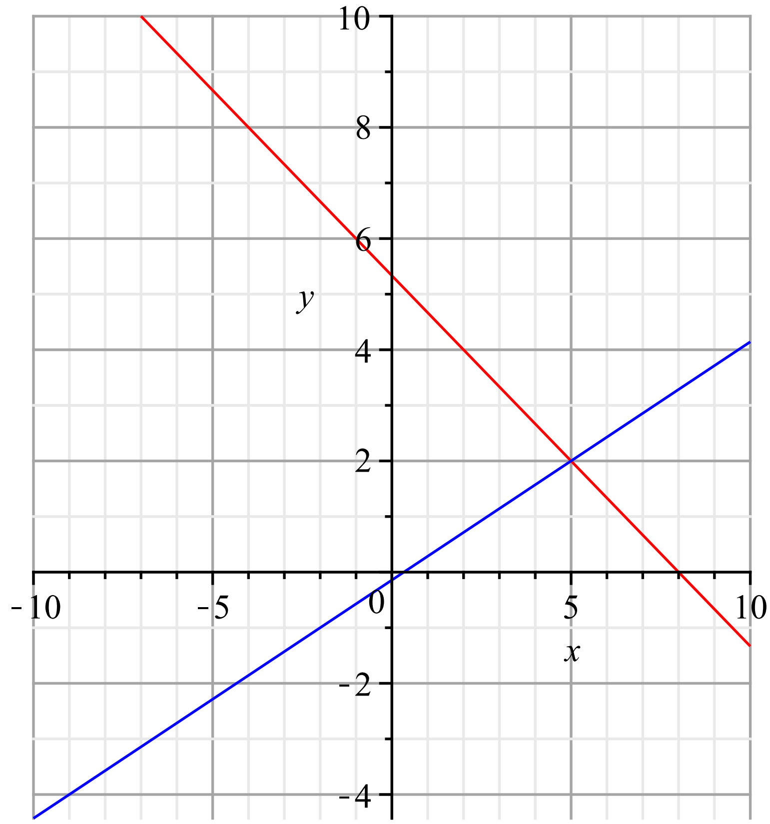
Encontrar la solución gráfica de la ecuación $x^2 - 7\,x + 10$

$x^2 - 7\,x + 10 \rightarrow$



Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones $2\,x+3\,y=16,\ 3\,x-7\,y=1$

$2\,x+3\,y=16,\ 3\,x-7\,y=1 \rightarrow$



Vectores, matrices y determinantes

Definición de un vector:

$$V := \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} :$$

Operaciones con vectores

Número de elementos del vector:

$ArrayNumElems(V) = 5$

Acceso a los elementos del vector

Acceso al primer elemento del vector (los elementos se enumeran a partir del número uno):

$V[1] = 5$

Acceso al tercer elemento del vector;

$V[3] = 1$

Cada uno de los elementos que forman el vector:

$ArrayElems(V)$

$$\{(1) = 5, (2) = 10, (3) = 1, (4) = 4, (5) = 3\}$$

Ordenamiento de vectores

Ordenamiento de menor a mayor de un vector:

$$sort(\mathrm{V}, \text{`<`}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Ordenamiento de mayor a menor de un vector:

$$sort(\mathrm{V}, \text{`>`}) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sumatoria de los elementos de un vector

$add(s, \mathrm{s} = V) = 23$

Operaciones con matrices

Definir las matrices M1 y M2:

$$M1 := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} : M2 := \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} :$$

Suma y diferencia de matrices

Suma de matrices:

$$evalm(M1 + M2) = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Resta de matrices:

$$evalm(\mathrm{M1} - \mathrm{M2}) = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -6 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar

Multiplicar lmatriz M1 por 5:

$$evalm(5 \cdot M1) = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 15 \\ -10 & 25 & 10 \\ 0 & -5 & 25 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

Multiplicar las dos siguientes matrices (operador &*)

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : B := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} :$$

$$evalm(A \&* B) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz

Invertir la siguiente matriz y multiplicar el resultado obtenido por la matriz original:

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}:$$

$$Inv := evalm\left(C^{-1}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$evalm(C \&* Inv) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Acceso a los elementos de una matriz

Sea la matriz A formado por los siguientes elementos:

$$A := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}:$$

Acceder al elemento que se encuentra en la primera fila, primera columna:

$$A[1, 1] = a$$

Acceder al elemento que se encuentra en la segunda fila, tercera columna:

$$A[2, 3] = f$$

Determinantes

Obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}:$$

Cargar la biblioteca para el cálculo de determinantes:
$with(LinearAlgebra):$

$Determinant(A) = 0$

Obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$B := \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}:$$

$Determinant(B) = -a\,c$

Cálculo se sumatorias (función *sum*)

Sumatoria numérica de los primeros cinco números naturales:

$$\sum_{x=1}^{5} x = 15$$

Sumatoria simbólica de los primeros cinco números naturales:

$$\sum_{i=1}^{5} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

Cálculo de productos (función *mul*)

Producto numérico de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{i=1}^{5} i = 120$$

Producto simbólico de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{i=1}^{5} n_i = n_1 \, n_2 \, n_3 \, n_4 \, n_5$$

Cálculo de límites (función *limit*)

Ejemplos básicos de cálculo de límites:

$$\lim_{x \to 3} 2x^2 + 1 = 19$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) = 3$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = 4$$

Cálculos del límite por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{x \to 1+} \frac{1}{1 - x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1 - x^2} = \infty$$

Cálculo de derivadas (función *diff*)

Calcular la derivada de las siguientes expresiones y simplificar el resultado si es necesario:

$$x^5 + 3x^4 + x^3 + 10$$

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^5 + 3x^4 + x^3 + 10\right) = 5x^4 + 12x^3 + 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x}\right) = \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - x} - \frac{\left(x^3 - 3x^2\right)(2x - 1)}{\left(x^2 - x\right)^2}$$

$$simplify\left(\frac{3x^2 - 6x}{x^2 - x} - \frac{\left(x^3 - 3x^2\right)(2x - 1)}{\left(x^2 - x\right)^2}\right) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$$

Cálculo de integrales (la función *int*)

Ejemplo de cálculo de integrales indefinidas:

$$\int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4$$

$$\int \left(x^2 + 5\right)^2 dx = 25 x + \frac{1}{5} x^5 + \frac{10}{3} x^3$$

Ejemplos de cálculo de integrales definidas:

$$\int_0^3 x^2 \, dx = 9$$

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 + 1\right)^2 dx = \frac{56}{15}$$