El Cálculo Simbólico en el Salón de Clases

Ricardo Villafaña Figueroa

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

A manera de introducción, podemos decir que los lenguajes computacionales de cálculo simbólico son aquellos que permiten la representación y el manejo computacional de expresiones algebraicas.

Los lenguajes simbólicos trabajan con variables o letras tal como lo haría un profesor en un pizarrón o en notas de clases para demostrar algún teorema o derivar alguna fórmula matemática.

Su capacidad de cálculo se puede observar en la facilidad con que realizan operaciones algebraicas básicas como son: suma, resta, multiplicación, división y potenciación de monomios y polinomios.

$$3x^2 + 4x - x + 2x^2$$

$$3x + 5x^2$$

$$\frac{8x^3}{4x^2} + x$$

$$3x$$

Así mismo, tienen capacidades de simplificación, factorización y expansión de expresiones algebraicas

$$\text{Simplify}\left[\frac{x}{x - \frac{x}{x-1}}\right]$$

$$\frac{-1 + x}{-2 + x}$$

```
Expand[(2 x + y)^2]
```

$4 x^2 + 4 x y + y^2$

```
Factor[4 x^2 + 4 x y + y^2]
```

$(2 x + y)^2$

Esta amplia gama de facilidades permiten al profesor disponer de una calculadora algebraica para acelerar cálculos o una herramienta didáctica para explicar o ejemplificar conceptos teórico- prácticos del álgebra.

El cálculo simbólico hace por el álgebra, por la trigonometría, por el cálculo y por el álgebra lineal lo que la calculadora científica hace por la aritmética.

Además de las capacidades básicas mencionadas, los lenguajes de cálculo simbólico cuentan con una amplia gama de funciones matemáticas para solucionar sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales, encontrar raíces reales y complejas de polinomios.

```
Solve[x^2 - 1 == 0]
```

{{x → -1}, {x → 1}}

```
Solve[{7 x + 4 y == 13, 5 x - 2 y == 19}, {x, y}]
```

{{x → 3, y → -2}}

```
Reduce[x^2 - 1 ≥ 0, x]
```

x ≤ -1 || x ≥ 1

Los lenguajes de cálculo simbólico cuentan con herramientas, notaciones y símbolos que amplían su uso en la trigonometría, en la geometría analítica y en el cálculo integral y diferencial; proporcionando con esto un contexto pedagógico muy amplio para la explicación conceptual del álgebra, sus herramientas y sus consecuentes aplicaciones en las matemáticas, en la ingeniería y en las ciencias.

$$\sum_{x=1}^{5} x$$

15

$$\prod_{x=1}^{5} x$$

120

$$\partial_x \left(x^3 + 3\,x^2 + 5\right)$$

$6\,x + 3\,x^2$

$$\int \left(3\,x^2 + 6\,x\right) \, dx$$

$3\,x^2 + x^3$

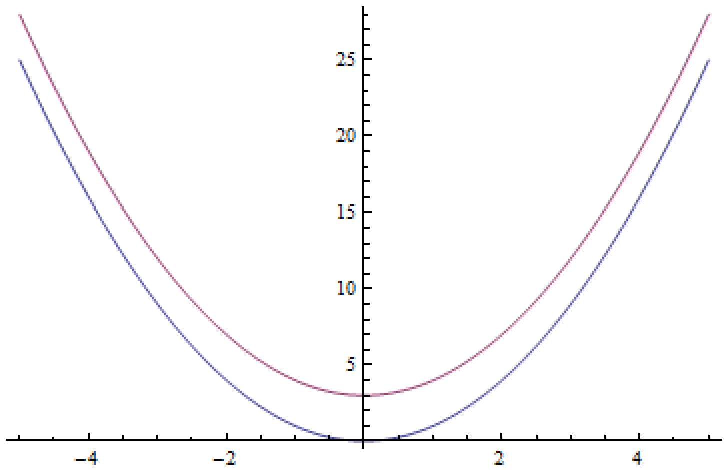
Los lenguajes simbólicos tienen la capacidad de generar gráficas a partir de funciones o representaciones algebraicas.

```
f[x_] = x^2
f1[x_] = x^2 + 3
```

x^2

$3 + x^2$

```
Plot[{f[x], f1[x]}, {x, -5, 5}]
```

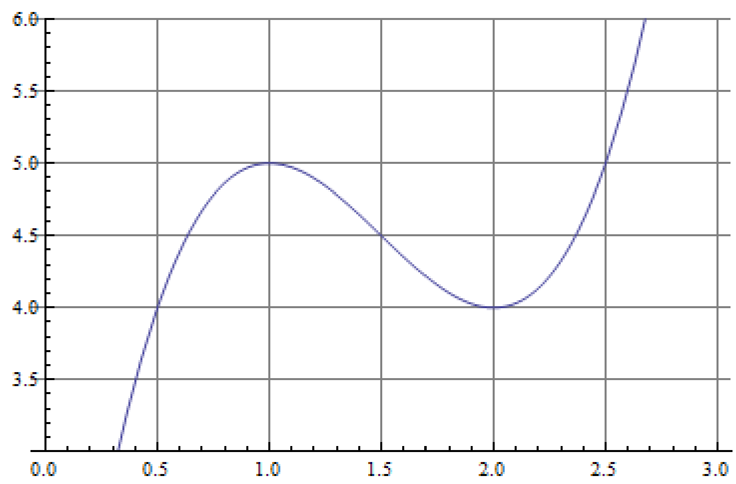


Esta capacidad de graficación permite al estudiante comprender más fácilmente las relaciones subyacentes entre la estructura matemática y su representación visual, al mismo tiempo que hace posible que el estudiante derive expresiones matemáticas a través de la visualización de una gráfica o viceversa (apropiación visual). La graficación también permite crear modelos cambiando el valor de los parámetros que generan las gráficas y con esto analizar y entender con mayor profundidad las relaciones entre cada parámetro y la gráfica que representa.

$f3[x\_] = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

$12x - 9x^2 + 2x^3$

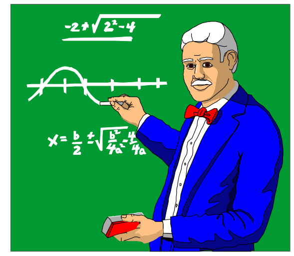
```
Plot[f3[x], {x, 0, 3}, PlotRange → {3, 6},
 GridLines → Automatic]
```



La capacidad y flexibilidad de los lenguajes de cálculo simbólico se pueden ampliar continuamente a través de sus facilidades de programación y creación de bibliotecas de funciones matemáticas especializadas. Estas facilidades han hecho que lenguajes comerciales como Mathematica, Maple, Maxima y Mathcad se conviertan en verdaderos hitos de la computación moderna por sus amplias aplicaciones pedagógicas, de investigación y de aplicación en áreas tan diversas como la Biología, la Medicina, la Farmacia, la Genética y las Ciencias Jurídicas, entre otras.

EL CÁLCULO SIMBÓLICO EN EL SALÓN DE CLASES

Los lenguajes de cálculo simbólico permiten al profesor de matemáticas, ingeniería y ciencias:



- Crear ambientes educativos interactivos,
- desarrollar material educativo y
- formar comunidades de profesores, estudiantes, e investigadores.

AMBIENTES ACADÉMICOS INTERACTIVOS

- Las múltiples alternativas que ofrece el cálculo simbólico para el manejo de expresiones matemáticas y su representación gráfica-visual permiten al profesor crear ambientes académicos interactivos para la demostración, exploración y el descubrimiento de nuevos conceptos tanto en las ciencias como en las matemáticas mismas.
- Los ambientes académicos interactivos permiten al estudiante investigar propiedades, relacionar conceptos, plantear y probar hipótesis, hacer deducciones, establecer teoremas y plantear y resolver problemas basados en matemáticas.
- La simplificación en el manejo algebraico permite al estudiante y al profesor concentrarse en problemas de mayor complejidad y alcance; y con esto, analizar más alternativas para solucionar un problema matemático dado.
- Los lenguajes simbólicos permiten distinguir claramente entre la tecnología computacional, los métodos asociados para su uso, los conceptos matemáticos involucrados y los problemas que se desean resolver. Paradigma que es válido para otros usos de la tecnología en el salón de clases.

DESARROLLO DE MATERIAL EDUCATIVO

Los lenguajes de cálculo simbólico son herramientas que facilitan el desarrollo de material educativo basado en computadoras a través de:

- Libros electrónicos
- Calculadoras-graficadoras especializadas para el análisis de funciones matemáticas o el análisis de espacios geométricos.
- Desarrollo de cuestionarios interactivos de reforzamiento.
- Desarrollo de material de difusión/ textos/ ejercicios en la red (Internet)

COMUNIDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y DE CIENCIAS

La facilidad que proporciona la Internet para publicar el material didáctico elaborado con un lenguaje simbólico, permite formar comunidades de profesores, investigadores y practicantes que intercambian continuamente experiencias y materiales en la red. Esta colaboración facilita la creación de bibliotecas digitales que diseminan las mejores prácticas y herramientas para el aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias en diferentes niveles y disciplinas.

CÁLCULOS NUMÉRICOS

Ejemplos de cálculos aritméticos básicos

Suma y resta

```
2 + 3.5
5.5
```

Multiplicación y división

```
2 * 3.4 / 2
3.4
```

Potencias

```
3^3
27
```

Combinación de operaciones

```
(2 + 3.5)^2 / 2
15.125
```

Ejemplos de cálculos numéricos exactos

Cálculos *exactos*	Cálculos aproximados (diez cifras de precisión)
13 / 6 $\frac{13}{6}$	N[13 / 6, 10] 2.166666667
$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$ $\frac{19}{15}$	$N\left[\frac{2}{3}+\frac{3}{5}, 10\right]$ 1.266666667
$\sqrt{50}$ $5\sqrt{2}$	$N\left[\sqrt{50}, 10\right]$ 7.071067812

DEFINICIÓN DE VARIABLES

Variable = valor	Asigna *valor* a *variable*
Clear[x]	Limpia el valor de la variable x

Asigna el valor de 30 a la variable a:

```
a = 30
30
```

Asigna el valor de 5 a la variable b:

```
b = 5
5
```

Multiplica las variables a y b:

```
a b
150
```

Divide los valores de a y b. El resultado obtenido lo almacena en la variable m:

```
m = a / b
6
```

Limpiando el valor de las variables

```
Clear[a]
```

```
a
a
```

Definición de funciones

Uso del símbolo de definición:

f[x_]:=expresión define una función

Los lenguajes de cálculo simbólico permiten al usuario definir sus propias funciones. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Función para el encontrar el doble de un número cualquiera:

```
F[x_] := 2 x
```

Ejemplos de uso:

```
F[4]
```

```
8
```

$F\left[\frac{1}{4}\right]$

$\frac{1}{2}$

Función para encontrar el área de un triángulo:

$\text{AreaTriangulo}[base\_,\ altura\_] := \frac{base\ altura}{2}$

Ejemplos de uso:

```
AreaTriangulo[10, 5]
```

```
25
```

EJEMPLOS DE FUNCIONES DE BIBLIOTECA

Raíz cuadrada

```
Sqrt[25]
```

5

Seno (argumento dado en radianes)

$\text{Sin}\left[\frac{\pi}{4}\right]$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Arco seno

$\text{ArcSin}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\frac{\pi}{4}$

Factorial

```
5!
```

120

Redondeo

```
Round[3.14]
```

3

Cálculos Algebraicos

En un lenguaje de cálculo simbólico se utilizan los mismos símbolos que en el álgebra tradicional: variables, constantes, operadores aritméticos, operadores lógicos, signos de igualdad, desigualdad, etc. Con estos operadores representamos y realizamos operaciones algebraicas.

Operaciones algebraicas básicas

Suma y resta

$$3\,x + 2\,y + x$$

$$4\,x + 2\,y$$

Multiplicación y división:

$$\frac{x^3}{x}\,x$$

$$x^3$$

Potencias

$$\left(x^2\right)^2$$

$$x^4$$

Combinación de operaciones

$$\frac{\left(3\,x^2\,y\right)^2}{9\,x\,y} + x^3\,y$$

$$2\,x^3\,y$$

Además de las operaciones tradicionales de suma, resta, multiplicación, división y potencia, los lenguajes de cálculo simbólico cuentan con funciones o comandos especiales para manejo de expresiones algebraicas.

Simplificación	Simplify$\left[\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right]$ $1+x$
Expansión	Expand$\left[(x+y)^3\right]$ $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
Factorización	Factor$\left[a^3-6a^2\right]$ $(-6+a)a^2$
Separación de un cociente en fracciones parciales	Apart$\left[\frac{1}{x^2-1}\right]$ $\frac{1}{2(-1+x)}-\frac{1}{2(1+x)}$

Cada una de estas funciones se tratan con más detalle en las siguientes secciones.

TRANSFORMACIONES ALGEBRAICA

Simplificación de expresiones algebraicas (Función Simplify)

Transformaciones algebraicas para obtener la expresión más sencilla o simple de la expresión dada.

Normalmente la simplificación de expresiones algebraicas se realiza de manera automática como se observa en los siguientes ejemplos:

$$\frac{(x-1)^2}{x-1}$$

$$-1+x$$

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{a}+a$$

$$\frac{5}{a}+a$$

Sin embargo, si intentamos simplificar la siguiente expresión

$\frac{x^2+2x+1}{x+1}$, tendríamos como resultado:

$$\frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

$$\frac{1+2x+x^2}{1+x}$$

En estos casos es necesario utilizar el comando correspondiente de simplificación (*simplify*):

```
Simplify[(x^2 + 2 x + 1)/(x + 1)]
```

$$\text{Simplify}\left[\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right]$$

$1+x$

A continuación se muestran otros ejemplos de simplificación algebraica:

$$\text{Simplify}\left[\frac{1-a^2}{1-a}\right]$$

$1+a$

$$\text{Simplify}\left[\frac{x^2-5x+6}{2ax-6a}\right]$$

$$\frac{-2+x}{2a}$$

Expansión de expresiones algebraicas (Función *Expand*)

Multiplicación de productos y potencias.

Observemos el siguiente ejemplo.

Desarrollar la expresión:

```
3 a (2 a + b)
```

Si intentamos por los métodos anteriores obtendríamos:

Multiplicación directa:

```
3 a (2 a + b)
3 a (2 a + b)
```

Simplificación:

```
Simplify[3 a (2 a + b)]
3 a (2 a + b)
```

El método directo de la multiplicación y el método de la simplificación no *desarrollan* la expresión; para esto utilizamos el comando *expand*:

```
Expand[3 a (2 a + b)]
```

$6 a^2 + 3 a b$

Veamos otros dos ejemplos de expansión algebraica:

```
Expand[(a + b) (a + c)]
```

$a^2 + a\,b + a\,c + b\,c$

$$\text{Expand}\left[3\,a\,\frac{a+b}{a^2}\right]$$

$$3 + \frac{3\,b}{a}$$

Ejemplos de expansión algebraica aplicada a binomios y trinomios:

$$\text{Expand}\left[(a+b)^3\right]$$

$a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$

$$\text{Expand}\left[(x+y+z)^2\right]$$

$x^2 + 2\,x\,y + y^2 + 2\,x\,z + 2\,y\,z + z^2$

Simplificación con suposiciones (uso la función assuming y refine)

Consideramos la expansión de la siguiente expresión:

```
Expand[√(x²)]
```

$\sqrt{x^2}$

Observamos que el comando *Expand* no regresa el resultado esperado. Para resolver este problema, hay que proporcionarle al sistema de cálculo más información respecto al dominio de la X; en este caso, que considere como dominio del valor de X todos los valores mayores o iguales a cero. Esta suposición se logra de tres formas diferentes: (1) agregando a la función Simplify un parámetro de suposición, (2) con la función *Assuming* y (3) con la función *Refine*, tal como se muestra en los siguientes ejemplos:

```
Simplify[√(x²), x ≥ 0]
```

x

```
Refine[√(x²), x ≥ 0]
```

x

```
Assuming[x ≥ 0, Refine[√(x²)]]
```

x

```
Assuming[x ≥ 0, Refine[Expand[√(x²)]]]
```

x

Otros ejemplos de las funciones *Refine* y *Assuming*:

```
Refine[√(x²) + √(y²) + √(z²), {x ≥ 0, y ≥ 0, z ≥ 0}]
```

```
x + y + z
```

La expresión anterior es equivalente a las siguientes expresiones:

```
Assuming[{x ≥ 0, y ≥ 0, z ≥ 0}, Refine[√(x²) + √(y²) + √(z²)]]
```

```
x + y + z
```

```
Assuming[{x ≥ 0, y ≥ 0, z ≥ 0},
 Refine[Expand[√(x²) + √(y²) + √(z²)]]]
```

```
x + y + z
```

Separación de un cociente en fracciones parciales (Función Apart)

La función *Apart* separa y simplifica un cociente polinomial en fracciones parciales:

$$\text{Apart}\left[\frac{6}{3\,x^2 - 6\,x}\right]$$

$$\frac{1}{-2 + x} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Apart}\left[\frac{1}{x^2 + x}\right]$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x}$$

$$\text{Apart}\left[\frac{x^3 - 3\,x + 2}{x^3 - 5\,x^2 + 3\,x + 9}\right]$$

$$1 + \frac{5}{(-3 + x)^2} + \frac{19}{4\,(-3 + x)} + \frac{1}{4\,(1 + x)}$$

Factorización de expresiones algebraicas (Función *Factor*)

Reducción a productos o factores.

El comando *factor* se utiliza para factorizar expresiones algebraicas.

Ejemplos de factorización

Factorización de polinomios:

```
Factor[3 a^3 - 6 a^2]
```

$3\,(-2+a)\,a^2$

```
Factor[1/3 a^2 + 2/6 a^3]
```

$\frac{1}{3}\,a^2\,(1+a)$

Factorización de diferencia de cuadrados:

```
Factor[x^2 - y^2]
```

$(x-y)\,(x+y)$

```
Factor[1/4 m^4 - n^6]
```

$\frac{1}{4}\,(m^2-2\,n^3)\,(m^2+2\,n^3)$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto:

```
Factor[x^2 - 2 x y + y^2]
```

$(x - y)^2$

```
Factor[x^2 - 4 x y + 4 y^2]
```

$(x - 2 y)^2$

Factorización de un trinomio de la forma:

$x^2 + b\ x + c$

```
Factor[x^2 - 5 x + 6]
```

$(-3 + x)\ (-2 + x)$

```
Factor[x^2 - x - 6]
```

$(-3 + x)\ (2 + x)$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES (FUNCIÓN *SOLVE*)

El comando utilizado para resolver ecuaciones es *solve*.

Resolver la ecuación

$$6x - 7 = 2x + 1$$

```
Solve[6 x - 7 == 2 x + 1, x]
```

```
{{x → 2}}
```

Resolver la ecuación

$$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}$$

```
Solve[x/(x + 1) + 5/8 == 5/(2 (x + 1)) + 3/4, x]
```

```
{{x → 3}}
```

Resolver la ecuación

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

```
Solve[x^2 - 7 x + 10 == 0, x]
```

```
{{x → 2}, {x → 5}}
```

Resolver la ecuación

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

```
Solve[a x^2 + b x + c == 0, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right\}, \left\{x \to \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right\}\right\}$$

Solución de un sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x + 3y = 16$$

$$3x - 7y = 1$$

```
Solve[{2 x + 3 y == 16, 3 x - 7 y == 1}, {x, y}]
{{x → 5, y → 2}}
```

Un sistema con tres variables

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + 2x = 5$$

$$x - y - 3x = 10$$

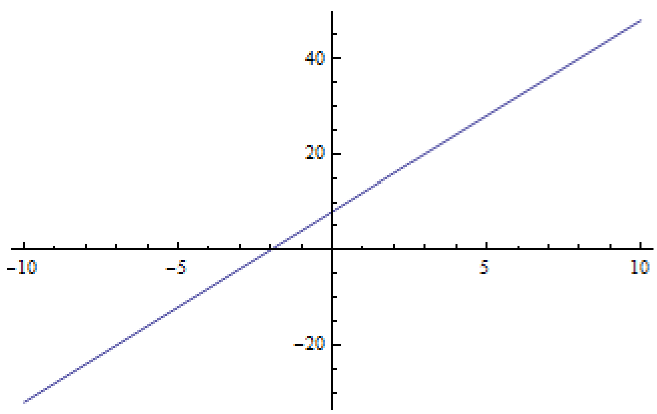
```
Solve[{x + y + z == 6, x - y + 2 z == 5, x - y - 3 z == 10},
 {x, y, z}]
{{x → 7, y → 0, z → -1}}
```

Solución gráfica de ecuaciones (Función *Plot*)

Encontrar la solución gráfica de la siguiente ecuación

$$y = 4x + 8$$

```
Plot[4 x + 8, {x, -10, 10}]
```



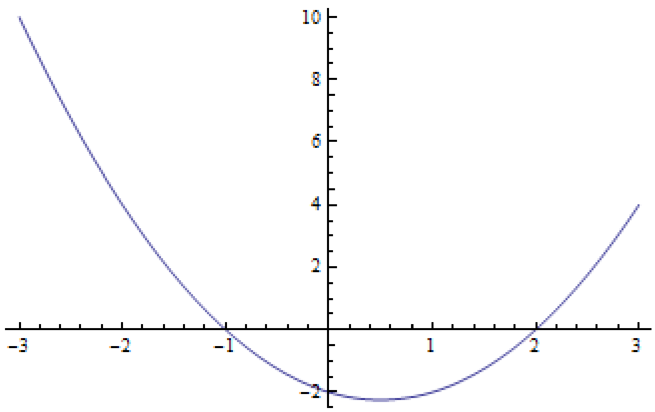
Con el comando *solve* tenemos el siguiente resultado:

```
Solve[4 x + 8 == 0, x]
{{x → -2}}
```

Encontrar la solución gráfica de la siguiente ecuación

$$y = x^2 - x - 2$$

```
Plot[x^2 - x - 2, {x, -3, 3}]
```



Utilizando la función *Solve* obtendríamos:

```
Solve[x^2 - x - 2 == 0, x]
```

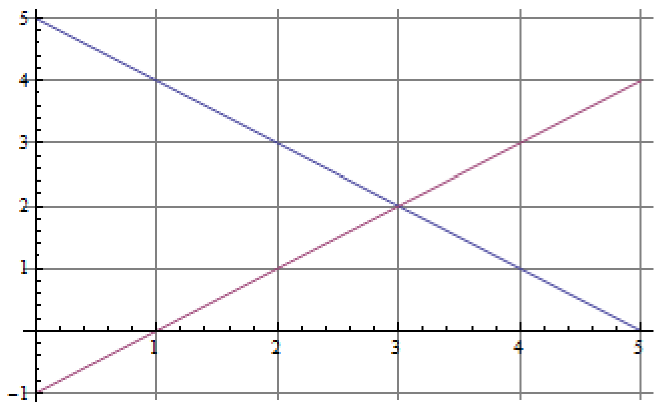
```
{{x → -1}, {x → 2}}
```

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

```
Plot[{5 - x, x - 1}, {x, 0, 5}, GridLines → Automatic]
```



Utilizando la función *Solve*:

```
Solve[{x + y == 5, x - y == 1}, {x, y}]
```

```
{{x → 3, y → 2}}
```

CÁLCULO

Cálculo de sumatorias (Función *Sum*)

Sumatoria numérica de los primeros cinco números naturales:

$$\sum_{x=1}^{5} x$$

15

Suma simbólica de los primeros cinco números naturales:

$$\sum_{i=1}^{5} n_i$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

Cálculo de una serie:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\frac{1}{2} n (1 + n)$$

Cálculo de productos (Función *Mul*)

Producto numérico de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{x=1}^{5} x$$

120

Producto simbólico de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{x=1}^{5} n_x$$

$n_1\, n_2\, n_3\, n_4\, n_5$

Cálculo de límites (Función *Limit*)

Ejemplos básicos

```
Limit[2 x^2 + 1, x → 3]
```

19

$$\text{Limit}\left[\frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \to 2\right]$$

4

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Sin}[x]}{x}, x \to 0\right]$$

1

Cálculos del límite por la izquierda y por la derecha:

$$F[x\_] := \frac{1}{1 - x^2}$$

```
Limit[F[x], x → 1, Direction → 1]
```

∞

```
Limit[F[x], x → 1, Direction → -1]
```

-∞

Cálculo de derivadas (Función *D*)

Calcular la derivada de las siguientes expresiones y simplificar el resultado si es necesario:

$$x^5 + 3x^4 + x^3 + 10$$

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x}$$

$$\partial_x \left(x^5 + 3\,x^4 + x^3 + 10\right)$$

$$3\,x^2 + 12\,x^3 + 5\,x^4$$

$$\partial_x \left(\frac{x^3 - 3\,x^2}{x^2 - x}\right)$$

$$\frac{-6\,x + 3\,x^2}{-x + x^2} - \frac{(-1 + 2\,x)\left(-3\,x^2 + x^3\right)}{\left(-x + x^2\right)^2}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{3 - 2\,x + x^2}{(-1 + x)^2}$$

Cálculo de integrales (Comando *Integrate*)

Ejemplo de cálculo de integrales indefinidas:

$$\int x^3 \, dx$$

$$\frac{x^4}{4}$$

$$\int \left(x^2 + 5\right)^2 \, dx$$

$$25\, x + \frac{10\, x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

Ejemplos de cálculo de integrales definidas:

$$\int_0^3 x^2 \, dx$$

$$9$$

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + 1\right)^2 \, dx$$

$$\frac{56}{15}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Suma y diferencia de matrices

Sumar y restar las siguientes matrices:

```
M1 = (-1  2
      -2  5)
```

```
{{-1, 2}, {-2, 5}}
```

```
M2 = (1  2
      2  2)
```

```
{{1, 2}, {2, 2}}
```

```
M1 + M2
```

```
{{0, 4}, {0, 7}}
```

```
M1 - M2
```

```
{{-2, 0}, {-4, 3}}
```

Producto de una matriz por un escalar

Multiplicar la matriz M1por 5:

```
5 M1
```

```
{{-5, 10}, {-10, 25}}
```

Producto de dos matrices

Multiplicar las dos siguientes matrices:

```
A1 = 
```
$$A1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
{{-1, 2}, {0, -1}, {1, 0}}
```

$$B1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
{{-1, 0}, {1, -1}}
```

```
A1.B1
```

```
{{3, -2}, {-1, 1}, {-1, 0}}
```

Inversa de una matriz

Invertir la siguiente matriz y multiplicar el resultado obtenido por la matriz original:

$$M1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

```
{{-1, 2}, {-2, 5}}
```

```
Inverse[M1]
```

```
{{-5, 2}, {-2, 1}}
```

```
Inverse[M1].M1
```

```
{{1, 0}, {0, 1}}
```

Determinantes

Obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$D1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 3, 5}, {2, 7, 9}, {1, 3, 5}}
```

```
Det[D1]
```

```
0
```

Acceso a los elementos de una matriz

```
M = ( a  b  c
      1  2  3
      w  x  y )
```

```
{{a, b, c}, {1, 2, 3}, {w, x, y}}
```

Primera fila:

```
M[[1]]
```

```
{a, b, c}
```

Primera fila, primera columna:

```
M[[1, 1]]
```

```
a
```

Tamaño de la matriz:

```
Dimensions[M]
```

```
{3, 3}
```

Despliegue de la matriz en columnas:

```
Column[M]
```

```
{a, b, c}
{1, 2, 3}
{w, x, y}
```