

Cálculo Simbólico

(MathCad)

Ricardo Villafaña Figueroa

Contenido

- Introducción al Cálculo Simbólico
- Cálculos Algebraicos
 - Representación simbólica o algebraica de expresiones matemáticas
 - Suma y resta algebraica
 - Multiplicación y división algebraica
 - Expansión algebraica
 - Factorización de números enteros
 - Factorización de expresiones algebraicas
 - Cálculos en modo simbólico y en modo numérico

Contenido

- Cálculos Simbólicos
 - Solución de ecuaciones
 - Cálculo de límites
 - Cálculo de derivadas
 - Cálculo de integrales
 - Cálculo de sumatorias
 - Cálculo de productos
- Solución gráfica de ecuaciones

Cálculo Simbólico

El cálculo simbólico reproduce desde una computadora los conceptos, las reglas y las notaciones utilizadas en el álgebra tradicional.

CÁLCULOS ALGEBRAICOS BÁSICOS

Representación simbólica o algebraica de expresiones matemáticas

En un lenguaje de cálculo simbólico se utilizan los mismos símbolos que en el álgebra tradicional.

(1)

$$3x - 2y + 1$$

(3)

$$x^2 + y^2 + 25$$

(2)

$$\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$$

(4)

$$2x + 3y = 16$$

Suma y resta algebraica

En los siguientes ejemplos se muestra la solución simbólica dada a la suma y resta de expresiones algebraicas.

(1) $12x + 3x - 7x \rightarrow 8 \cdot x$

(2) $(3a + 2 \cdot b) - (a - b) \rightarrow 2 \cdot a + 3 \cdot b$

(3) $\frac{2}{a} + \frac{3}{a} - \frac{2}{b} + \frac{5}{b} \rightarrow \frac{5}{a} + \frac{3}{b}$

Multiplicación y división algebraica

Ejemplos de multiplicación, manejo de exponentes y simplificación de cocientes

(1) $3(x + 2) \rightarrow 3 \cdot x + 6$

(3)

$$\left(\frac{3}{2} \cdot c\right)^3 \cdot c^2 \rightarrow \frac{27}{8} \cdot c^5$$

(2) $5(a^2 + 10) \rightarrow 5 \cdot a^2 + 50$

(4)

$$\frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} \rightarrow \frac{(x + 1)}{(x - 1)}$$

EXPANSIÓN

Expansión algebraica

Ejemplos de multiplicación algebraica utilizando técnicas de *expansión* simbólica.

(1) $3a \cdot (2a + b)$ expand $\rightarrow 6 \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot b$

(2) $(a + b)(a + c)$ expand $\rightarrow a^2 + a \cdot c + a \cdot b + b \cdot c$

(3) $3a \cdot \frac{(a + b)}{a^2}$ expand $\rightarrow \frac{3 \cdot a + 3 \cdot b}{a}$

Expansión algebraica

Los siguientes ejemplos muestran el uso de las reglas de *expansión* algebraica aplicadas a binomios

(1) $(x + y)^2$ expand $\rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$

(2) $(x + y)^3$ expand $\rightarrow x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$

(3) $(x + y)^4$ expand $\rightarrow x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot y + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x \cdot y^3 + y^4$

FACTORIZACIÓN

Factorización de números enteros

Los siguientes ejemplos muestran la factorización de números enteros

(1) 125 factor $\rightarrow 5^3$

(2) 130 factor $\rightarrow 2 \cdot 5 \cdot 13$

(3) 150 factor $\rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Factorización de expresiones algebraicas

Ejemplos de factorización de polinomios

(1) $3a^3 - 6a^2$ factor $\rightarrow 3 \cdot a^2 \cdot (a - 2)$

(2) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x$ factor $\rightarrow x \cdot (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

(3) $\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{6} \cdot a^3$ factor $\rightarrow \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot (1 + a)$

Factorización de expresiones algebraicas

Factorización de diferencia de cuadrados

(1) $x^2 - y^2$ factor $\rightarrow (x + y) \cdot (x - y)$

(2) $4x^2 - y^2$ factor $\rightarrow (2 \cdot x - y) \cdot (2 \cdot x + y)$

(3) $\frac{1}{4} \cdot m^4 - n^6$ factor $\rightarrow \frac{1}{4} \cdot (m^2 - 2 \cdot n^3) \cdot (m^2 + 2 \cdot n^3)$

Factorización de expresiones algebraicas

Factorización de trinomios cuadrados perfectos

(1) $x^2 + 2x \cdot y + y^2$ factor $\rightarrow (x + y)^2$

(2) $9 - 6x + x^2$ factor $\rightarrow (x - 3)^2$

(3) $a^2 + 4 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b^2$ factor $\rightarrow (a + 2 \cdot b)^2$

Factorización de expresiones algebraicas

Factorización de trinomios de la forma: $x^2 + b \cdot x + c$

(1) $x^2 + 7x + 10$ factor $\rightarrow (x + 5) \cdot (x + 2)$

(2) $x^2 - 5x + 6$ factor $\rightarrow (x - 2) \cdot (x - 3)$

(3) $a^2 + 5 \cdot a + a \cdot b + 5 \cdot b$ factor $\rightarrow (a + b) \cdot (a + 5)$

Cálculos en modo simbólico y en modo numérico

Los lenguajes computacionales de cálculo simbólico también pueden desarrollar soluciones de cálculo numérico

(1)

Cálculo numérico:

$$2 + \frac{1}{7} = 2.1428571429$$

(2)

Cálculo simbólico:

$$2 + \frac{1}{7} \rightarrow \frac{15}{7}$$

Cálculos en modo simbólico y en modo numérico

Para el cálculo de factorial de 30 tenemos los siguientes resultados:

(1) Cálculo numérico

$$30! = 2.653 \times 10^{32}$$

(2) Cálculo simbólico:

$$30! \rightarrow 265252859812191058636308480000000$$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Solución de Ecuaciones

Ejemplos en la solución de ecuaciones de primer grado.

Resolver la ecuación

(1)

$$6 \cdot x - 7 = 2 \cdot x + 1$$

Solución

$$6 \cdot x - 7 = 2 \cdot x + 1 \text{ solve, } x \rightarrow 2$$

Resolver la ecuación

(2)

$$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2 \cdot (x+1)} + \frac{3}{4}$$

Solución

$$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2 \cdot (x+1)} + \frac{3}{4} \text{ solve, } x \rightarrow 3$$

Solución de Ecuaciones

Ejemplos en la solución de ecuaciones de segundo grado.

Resolver la ecuación

(1)

$$x^2 - 7 \cdot x + 10 = 0$$

Solución

$$x^2 - 7 \cdot x + 10 = 0 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación

(2)

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Solución

$$3x^2 - 7x + 2 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución de Sistemas de Ecuaciones

Ejemplos en la solución de un sistema de ecuaciones

(1)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x - 7y = 1 \end{cases} \text{ solve, } x, y \rightarrow (5 \ 2)$$

(2)
$$\begin{cases} x - y - 3z = 10 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \text{ solve, } x, y, z \rightarrow (7 \ 0 \ -1)$$

CÁLCULO DE LÍMITES

Cálculo de Límites

Ejemplos de cálculos de límites básicos

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1) \rightarrow 19$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \rightarrow 3$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \rightarrow 4$$

Cálculo de Límites

Cálculos de límites por la izquierda y por la derecha

$$f(x) := \frac{1}{1-x^2}$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow -\infty$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow \infty$$

CÁLCULO DE DERIVADAS

Cálculo de derivadas

Ejemplos de cálculo de derivadas

$$(1) \quad \frac{d}{dx} (x^5 + 3x^4 + x^3 + 10) \rightarrow 5 \cdot x^4 + 12 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x} \rightarrow \frac{3 \cdot x^2 - 6 \cdot x}{x^2 - x} - \frac{x^3 - 3 \cdot x^2}{(x^2 - x)^2} \cdot (2 \cdot x - 1)$$

Simplificando el resultado obtenido

$$\frac{3 \cdot x^2 - 6 \cdot x}{x^2 - x} - \frac{x^3 - 3 \cdot x^2}{(x^2 - x)^2} \cdot (2 \cdot x - 1) \text{ simplify} \rightarrow \frac{x^2 - 2 \cdot x + 3}{(x - 1)^2}$$

CÁLCULO DE INTEGRALES

Cálculo de integrales indefinidas

Ejemplos de cálculos de integrales indefinidas

$$(1) \quad \int x^2 dx \rightarrow \frac{1}{3} \cdot x^3$$

$$(2) \quad \int (x^2 + 5)^2 dx \rightarrow \frac{1}{5} \cdot x^5 + \frac{10}{3} \cdot x^3 + 25 \cdot x$$

$$(3) \quad \int e^x dx \rightarrow e^x$$

Cálculo de integrales definidas

Ejemplos de cálculos de integrales definidas

(1) $\int_0^3 x^2 dx \rightarrow 9$

(2) $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)^2 dx \rightarrow \frac{56}{15}$

(3) $\int_0^1 e^x dx \rightarrow e - 1$

CÁLCULO DE SUMATORIAS

Cálculo de sumatorias

Sumatoria simbólica de los primeros cinco números naturales.

$$\sum_{i=1}^5 n_i \rightarrow n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

Sumatoria simbólica del inverso de los primeros cinco números naturales:.

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{n_i} \rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5}$$

Sumatoria numérica de los primeros cinco números naturales

$$\sum_{x=1}^5 x \rightarrow 15$$

CÁLCULO DE PRODUCTOS

Cálculo de productos

Producto simbólico de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{i=1}^5 n_i \rightarrow n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5$$

Producto simbólico del inverso de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{i=1}^5 \frac{1}{n_i} \rightarrow \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5}$$

Producto numérico de los primeros cinco números naturales:

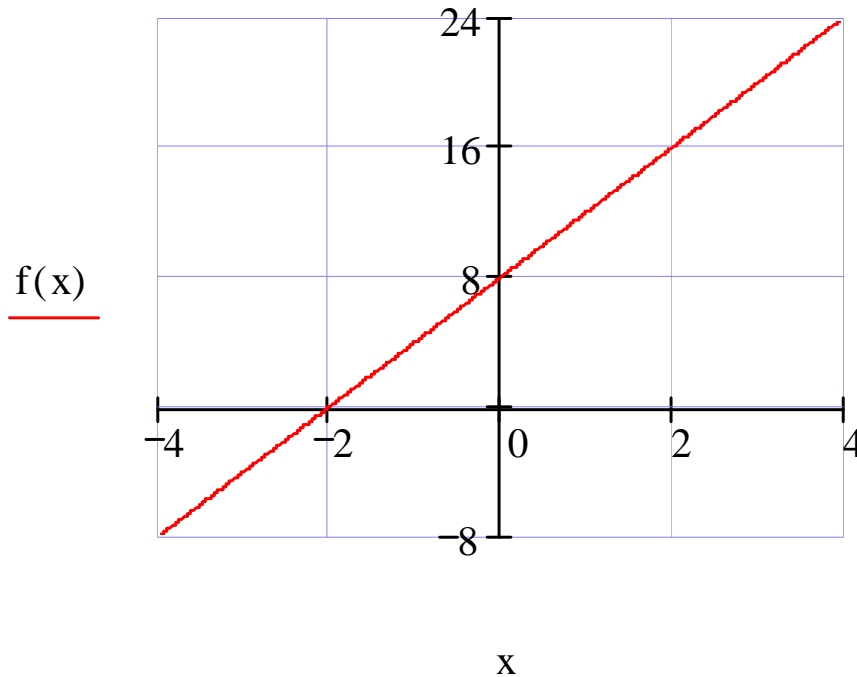
$$\prod_{i=1}^5 i \rightarrow 120$$

SOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES

Solución gráfica de ecuaciones

Encontrar la solución de la siguiente función por el método

gráfico: $f(x) := 4x + 8$



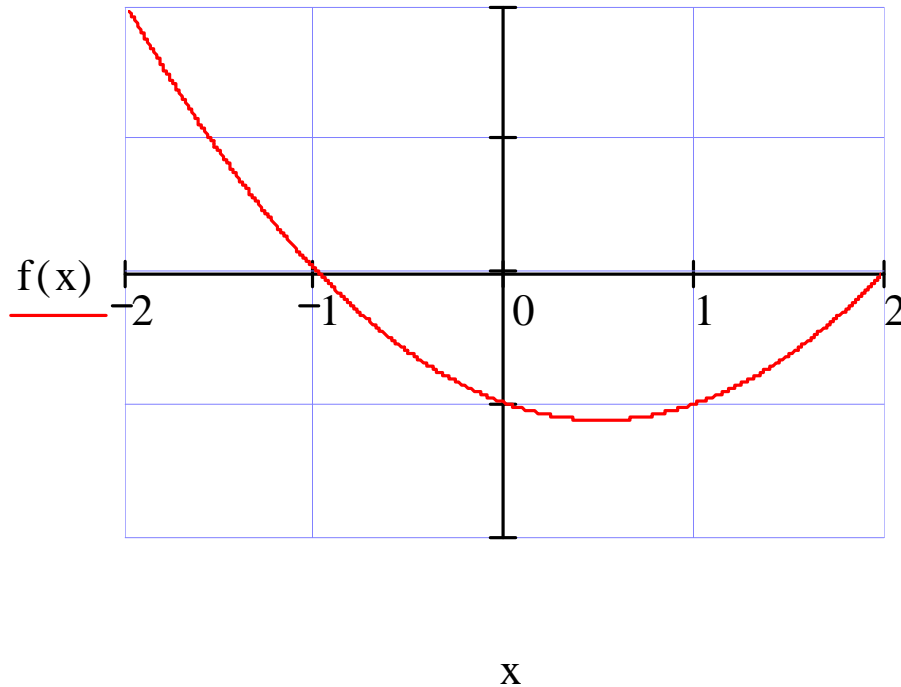
El comando **solve** da la siguiente solución:

$$f(x) \text{ solve, } x \rightarrow -2$$

Solución gráfica de ecuaciones

Encontrar la solución de la siguiente función por el método

gráfico: $f(x) := x^2 - x - 2$



Utilizando el comando
solve::

$$f(x) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución gráfica de un sistema de ecuaciones

Encontrar la solución gráfica para el siguiente par de ecuaciones simultáneas:

$$x - y = 1$$

$$x + y = 5$$

Representación funcional del par de ecuaciones:

$$f2(x) := x - 1$$

$$f1(x) := 5 - x$$

