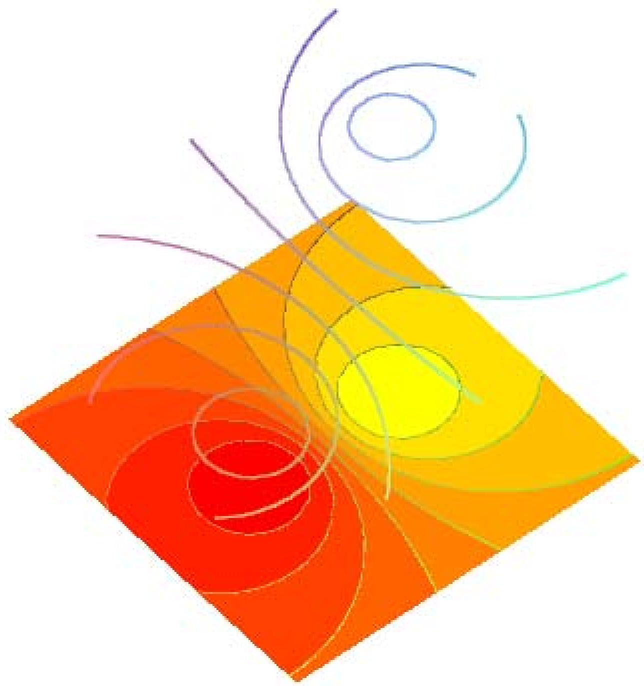
CÁLCULO SIMBÓLICO Y GEOMETRÍA CON MAPLE

Hipérbola



Ricardo Villafaña Figueroa

Contenido

Propiedades de la hipérbola dada su ecuación

Ejemplo

Encontrar el centro, el foco, los vértices y las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente hipérbola $9\,y^2 - 4\,x^2 = 36$. Graficar la hipérbola y sus dos asíntotas.

Solución

Cargamos la biblioteca con las funciones de geometría:

$$with(geometry):$$

Definimos la hipérbola h1 con la función ***hyperbola***:

$$hyperbola\left(h1,\ 9\,y^2 - 4\,x^2 = 36,\ [x, y]\right)$$

$$h1$$

Encontramos el centro y sus coordenadas correspondientes con las funciones ***center*** y ***coordinates*** respectivamente:

$$center(h1),\ coordinates(center(h1))$$

$$center\_h1,\ [0, 0]$$

Encontramos sus focos con la función ***foci***:

$$foci(h1)$$

$$[foci\_1\_h1, foci\_2\_h1]$$

Encontramos las coordenadas de sus dos focos con la función ***coordinates*** y utilizando el resultado obtenido anteriormente:

$$coordinates(\%[1]),\ coordinates(\%[2])$$

$$\left[0, -\sqrt{13}\right], \left[0, \sqrt{13}\right]$$

Otra forma de encontrar las coordinadas de los focos es a través de la función ***map***:

$$map(coordinates,\ foci(h1))$$

$$[[0, -\sqrt{13}], [0, \sqrt{13}]]$$

Encontramos sus vértices con las funciones ***vertices***, ***map*** y ***coordinates***:

$$vertices(h1),\ map(coordinates,\ vertices(h1))$$

$$[vertex\_1\_h1, vertex\_2\_h1], [[0, -2], [0, 2]]$$

Las ecuaciones de las asíntotas las encontramos con las funciones ***asymptotes***, ***map*** y ***Equation***:

$$asymptotes(h1),\ map(Equation,\ asymptotes(h1))$$

$$[asymptote\_1\_h1, asymptote\_2\_h1], \left[y + \frac{2}{3}x = 0, y - \frac{2}{3}x = 0\right]$$

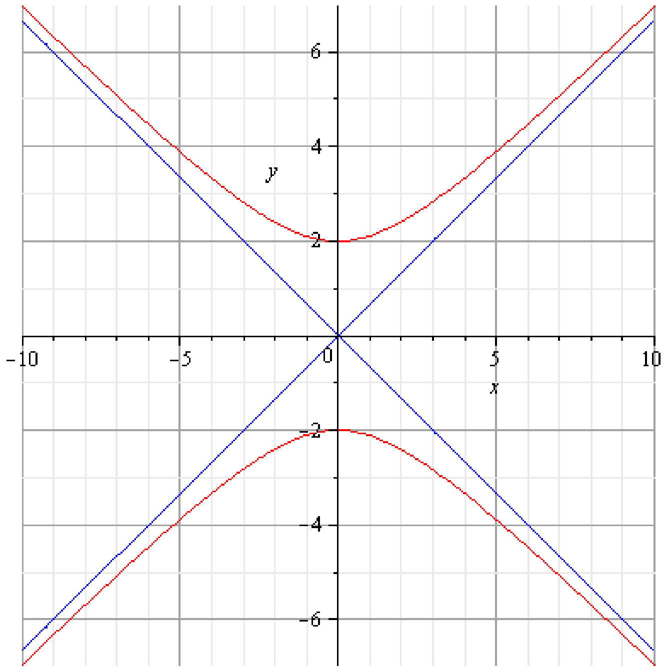
Detalles de la ecuación:

$$detail(h1)$$

name of the object	$h1$
form of the object	$hyperbola2d$
center	$[0, 0]$
foci	$[[0, -\sqrt{13}], [0, \sqrt{13}]]$
vertices	$[[0, -2], [0, 2]]$
the asymptotes	$\left[y + \frac{2x}{3} = 0, y - \frac{2x}{3} = 0\right]$
equation of the hyperbola	$9y^2 - 4x^2 - 36 = 0$

Dibujar la gráfica de la hipérbola y sus asíntotas: utilizamos el botón derecho del ratón, elegimos la opción de gráficas implícitas con los ejes X, Y. Después arrastramos y soltamos en el área gráfica las expresiones matemáticas de las asíntotas.

$9\ y^2 - 4\ x^2 - 36 = 0 \longrightarrow$



Ecuación de la hipérbola a partir de sus focos y sus vértices

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la hipérbola con sus focos $f1\ (5, 0)\ y\ f2\ (-5, 0)$ y sus vértices $v1\ (0, 3)\ y\ v2\ (0, -3)$. Encontrar las coordenadas de su centro, las ecuaciones de las asíntotas y graficar la función.

Solución

Cargamos la biblioteca con las funciones de geometría:

$$with(geometry):$$

Definimos los puntos de los vértices:

$$vert1 := point(v1,\ 0, 3)$$

$$v1$$

$$vert2 := point(v2,\ 0, -3)$$

$$v2$$

Definimos los puntos de los focos:

$$foco1 := point(f1,\ 5, 0)$$

$$f1$$

$$foco2 := point(f2,\ -5, 0)$$

$$f2$$

Definimos la ecuación de la hipérbola h1 con la forma vértices y focos de la función ***hyperbola***:

$$hyperbola(h1,\ ['vertices' = [vert1,\ vert2], 'foci' = [\mathrm{foco1},\ foco2]], [x, y])$$

$$h1$$

Encontramos la ecuación de la hipérbola h1 con la función ***Equation***:

$$Equation(h1)$$

$$-256\,x^2+2304+144\,y^2=0$$

Encontramos las ecuaciones de las asíntotas con la función ***asymptotes*** y sus ecuaciones respectivas con la función ***map***:

$$asymptotes(h1),\ map(Equation,\ asymptotes(h1))$$

$$[asymptote\_1\_h1,\ asymptote\_2\_h1],\ \left[y+\frac{4}{3}\,x=0,\ y-\frac{4}{3}\,x=0\right]$$

Detalles de la ecuación encontrada:

$$detail(h1)$$

name of the object	$h1$
form of the object	$hyperbola2d$
center	$[0, 0]$
foci	$[[-5, 0], [5, 0]]$
vertices	$[[-3, 0], [3, 0]]$
the asymptotes	$\left[y+\frac{4\,x}{3}=0,\ y-\frac{4\,x}{3}=0\right]$
equation of the hyperbola	$-256\,x^2+2304+144\,y^2=0$

Nota: La ecuación de la hipérbola encontrada se puede convertir a su forma ordinaria igualándola a uno de la siguiente manera:

$$eq := Equation(h1)$$

$$-256\,x^2+2304+144\,y^2=0$$

Seleccionamos el término independiente (una constante):

$$independiente := select(type, radnormal(op(1, eq)), constant)$$

$$2304$$

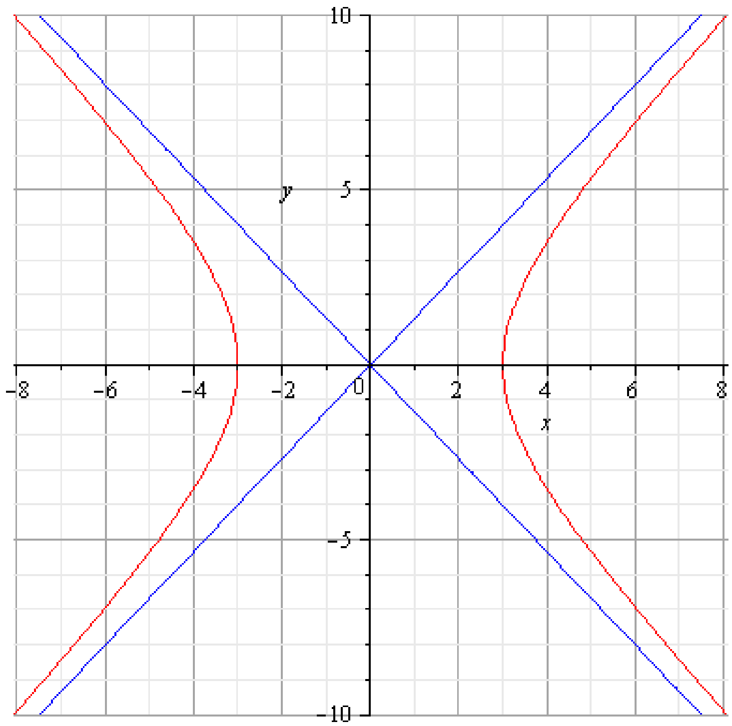
Calculamos la forma ordinaria de la ecuación:

$$formaOrdinaria := \frac{eq - (independiente)}{independiente} \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 = 1$$

Dibujar la gráfica de la hipérbola y sus asíntotas:

$$-256\ x^2 + 2304 + 144\ y^2 = 0 \ \rightarrow$$



Ecuación de la hipérbola a partir de sus focos y la distancia entre sus dos vértices.

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la hipérbola con sus focos $f1\ (13,0)\ y\ f2\ (-13,0)$ y sus vértices v1 $(5,0)\ y\ v2\ (-5,0)$. Convertir la ecuación encontrada a su forma ordinaria y graficarla.

Solución

Cargamos la biblioteca con las funciones de geometría:

$$with(geometry):$$

Definimos los puntos de los vértices:

$$vert1 := point(v1,\ 5,\ 0)$$

$$v1$$

$$vert2 := point(v2,\ -5,\ 0)$$

Definimos los puntos de los focos:

$$foco1 := point(f1,\ 13,\ 0)$$

$$f1$$

$$foco2 := point(f2,\ -13,\ 0)$$

$$f2$$

Encontramos la distancia entre los dos vértices:

$$distancia := distance(v1,\ v2)$$

$$\sqrt{100}$$

Definimos la ecuación de la hipérbola h1 con la forma focos y distancia entre sus vértices:

$$hyperbola(h1, ['foci' = [\mathrm{foco1}, foco2], 'distancev' = distancia], [x, y])$$

$$h1$$

Encontramos su ecuación:

$$eq := Equation(h1)$$

$$-2304\,x^2 + 57600 + 400\,y^2 = 0$$

Simplificando la expresión (forma ordinaria de la ecuación).

Seleccionamos el término independiente (una constante),

$$independiente := select(type, radnormal(op(1, eq)), constant)$$

$$57600$$

El término independiente lo restamos de ambos miembros de la ecuación, la dividimos por este mismo término (para obtener el uno) y los multiplicamos por su negativo:

$$formaOrdinaria := \frac{eq - (independiente)}{independiente} \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{25}\,x^2 - \frac{1}{144}\,y^2 = 1$$

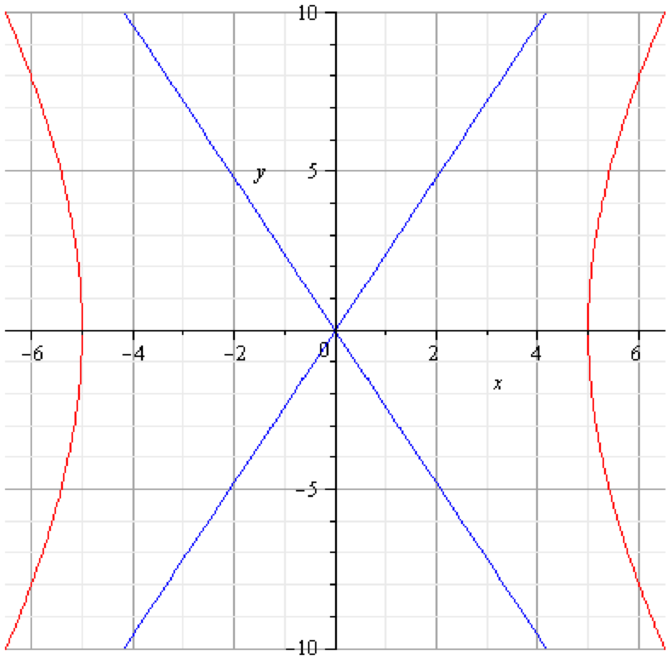
Detalles de la ecuación encontrada:

$detail(h1)$

name of the object	$h1$
form of the object	*hyperbola2d*
center	$[0, 0]$
foci	$[[-13, 0], [13, 0]]$
vertices	$[[-5, 0], [5, 0]]$
the asymptotes	$\left[y + \frac{12\,x}{5} = 0,\ y - \frac{12\,x}{5} = 0\right]$
equation of the hyperbola	$-2304\,x^2 + 57600 + 400\,y^2 = ($

Graficar la función y sus asíntotas:

$-2304\ x^2 + 57600 + 400\ y^2 = 0 \rightarrow$



Ecuación de la hipérbola a partir de sus vértices y la distancia entre sus dos focos.

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la hipérbola con sus focos $f1\ (-5,0)\ y\ f2\ (5,0)$ y sus vértices v1 $(-4,0)\ y\ v2\ (4,0)$. Convertir la ecuación encontrada a su forma ordinaria y graficarla.

Solución

Cargamos la biblioteca con las funciones de geometría:

$with(geometry):$

Definimos los puntos de los vértices:

$vert1 := point(v1, -4, 0)$

$v1$

$vert2 := point(v2, 4, 0)$

$v2$

Definimos los puntos de los focos:

$foco1 := point(f1, -5, 0)$

$f1$

$foco2 := point(f2, 5, 0)$

$f2$

Encontramos la distancia entre los dos focos:

$distancia := distance(f1, f2)$

$\sqrt{100}$

Definimos la ecuación de la hipérbola ***h1*** con la forma vértices y distancia entre sus focos:

$$hyperbola(h1, ['vertices' = [vert1, vert2], 'distancef' = distancia], [x, y])$$

$$h1$$

Encontramos su ecuación:

$$eq := Equation(h1)$$

$$-144\,x^2 + 2304 + 256\,y^2 = 0$$

Simplificando la expresión (forma ordinaria de la ecuación).

$$independiente := select(type, radnormal(op(1, eq)), constant)$$

$$2304$$

El término independiente lo restamos de ambos miembros de la ecuación, la dividimos por este mismo término (para obtener el ***uno***) y los multiplicamos por su negativo:

$$formaOrdinaria := \frac{eq - (independiente)}{independiente} \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{16}\,x^2 - \frac{1}{9}\,y^2 = 1$$

Detalles de la ecuación:

$detail(h1)$

name of the object	$h1$
form of the object	$hyperbola2d$
center	$[0, 0]$
foci	$[[-5, 0], [5, 0]]$
vertices	$[[-4, 0], [4, 0]]$
the asymptotes	$\left[y + \frac{3\,x}{4} = 0, y - \frac{3\,x}{4} = 0\right]$
equation of the hyperbola	$-144\,x^2 + 2304 + 256\,y^2 = 0$

Gráfica de la ecuación:

$-144\ \ x^2 + 2304 + 256\ \ y^2 = 0 \ \rightarrow$