2009

Innovación Educativa

Ricardo Villafaña Figueroa

EL CÁLCULO SIMBÓLICO EN EL SALÓN DE CLASES - MATHCAD

Ejemplos de cálculo simbólico utilizando Mathcad para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Orientación a la enseñanza media superior.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN

A manera de introducción, podemos decir que los lenguajes computacionales de cálculo simbólico son aquellos que permiten la representación y el manejo computacional de expresiones algebraicas.

$$3(x+2) = 3\,x + 6$$

$$c = \pi \times \text{radio}^2$$

Los lenguajes simbólicos trabajan con variables o letras tal como lo haría un profesor en un pizarrón o en notas de clases para demostrar algún teorema o derivar alguna fórmula matemática.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2$$

$$(3+2)^2 = (3)^2 + 2(3)(2) + (2)^2 = 25$$

Su capacidad de cálculo se puede observar en la facilidad con que realizan operaciones algebraicas básicas como son: suma, resta, multiplicación, división y potenciación de monomios y polinomios.

$$3x^2 + 4x - x + 2x^2 = 5\,x^2 + 3\,x$$

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$\frac{x+y}{3(x+y)} = \frac{1}{3}$$

Así mismo, tienen capacidades de simplificación, factorización y expansión de expresiones algebraicas.

$$\frac{x}{x-\frac{x}{x-1}}\ \text{simplify} = \frac{1}{x-2}+1$$

$$(2x+y)^2\ \text{expand} = 4x^2+4xy+y^2$$

$$4x^2+4xy+y^2\ \text{factor} = (2x+y)^2$$

El cálculo simbólico hace por el álgebra, por la trigonometría, por el cálculo y por el álgebra lineal lo que la calculadora científica hace por la aritmética.

Esta amplia gama de facilidades permiten al profesor disponer de una calculadora algebraica para acelerar cálculos o una herramienta didáctica para explicar o ejemplificar conceptos teórico- prácticos del álgebra.

Además de las capacidades básicas mencionadas, los lenguajes de cálculo simbólico cuentan con una amplia gama de funciones matemáticas para solucionar sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales, encontrar raíces reales y complejas de polinomios.

$$x^2-1\ \text{solve} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7x+4y=13\\5x-2y=19\end{pmatrix}\ \text{solve}, x, y = \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}$$

Cuentan con herramientas, notaciones y símbolos que amplían su uso en la trigonometría, en la geometría analítica y en el cálculo integral y diferencial; proporcionando con esto un contexto pedagógico muy amplio para la explicación conceptual del álgebra, sus herramientas y sus consecuentes aplicaciones en las matemáticas, en la ingeniería y en las ciencias.

$$\sum_{x=1}^{5} x = 15$$

$$\prod_{i=1}^{5} i = 120$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = 3$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + 3x^2 + 5\right) = 3\,x^2 + 6\,x$$

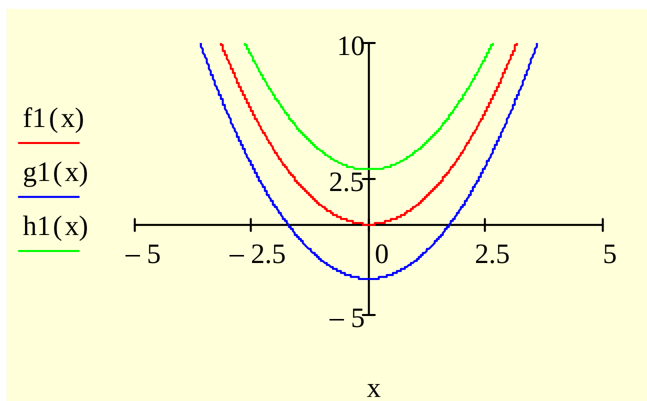
$$\int 3\,x^2 + 6\,x\,dx = x^3 + 3\,x^2$$

Los lenguajes simbólicos tienen la capacidad de generar gráficas a partir de funciones o representaciones algebraicas.

$$f1(x) = x^2$$

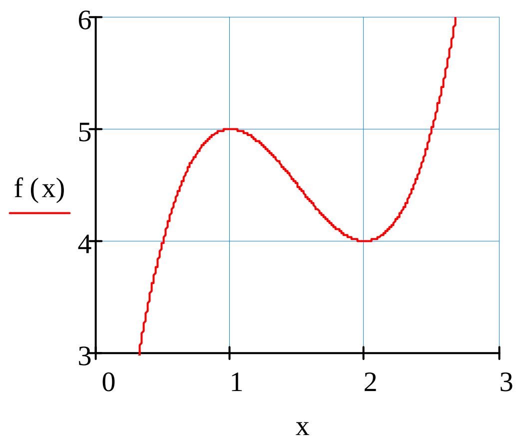
$$h1(x) = x^2 + 3$$

$$g1(x) = x^2 - 3$$



Esta capacidad de graficación permite al estudiante comprender más fácilmente las relaciones subyacentes entre la estructura matemática y su representación visual, al mismo tiempo que hace posible que el estudiante derive expresiones matemáticas a través de la visualización de una gráfica o viceversa (apropiación visual). La graficación también permite crear modelos cambiando el valor de los parámetros que generan las gráficas y con esto analizar y entender con mayor profundidad las relaciones entre cada parámetro y la gráfica que representa.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$$

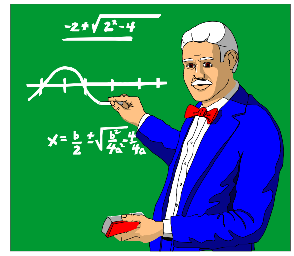


La capacidad y flexibilidad de los lenguajes de cálculo simbólico se pueden ampliar continuamente a través de sus facilidades de programación y creación de bibliotecas de funciones matemáticas especializadas. Estas facilidades han hecho que lenguajes comerciales como Mathematica, Maple, Maxima y Mathcad se conviertan en verdaderos hitos de la computación moderna por sus amplias aplicaciones pedagógicas, de investigación y de aplicación en áreas tan diversas como la Biología, la Medicina, la Farmacia, la Genética y las Ciencias Jurídicas, entre otras.

EL CÁLCULO SIMBÓLICO EN EL SALÓN DE CLASES

Los lenguajes de cálculo simbólico permiten al profesor de matemáticas, ingeniería y ciencias:

- Crear ambientes educativos interactivos,
- desarrollar material educativo y
- formar comunidades de profesores, estudiantes, e investigadores.



AMBIENTES ACADÉMICOS INTERACTIVOS

- Las múltiples alternativas que ofrece el cálculo simbólico para el manejo de expresiones matemáticas y su representación gráfica-visual permiten al profesor crear ambientes académicos interactivos para la demostración, exploración y el descubrimiento de nuevos conceptos tanto en las ciencias como en las matemáticas mismas.
- Los ambientes académicos interactivos permiten al estudiante investigar propiedades, relacionar conceptos, plantear y probar hipótesis, hacer deducciones, establecer teoremas y plantear y resolver problemas basados en matemáticas.
- La simplificación en el manejo algebraico permite al estudiante y al profesor concentrarse en problemas de mayor complejidad y alcance; y con esto, analizar más alternativas para solucionar un problema matemático dado.
- Los lenguajes simbólicos permiten distinguir claramente entre la tecnología computacional, los métodos asociados para su uso, los conceptos matemáticos involucrados y los problemas que se desean resolver. Paradigma que es válido para otros usos de la tecnología en el salón de clases.

DESARROLLO DE MATERIAL EDUCATIVO

Los lenguajes de cálculo simbólico son herramientas que facilitan el desarrollo de material educativo basado en computadoras a través de:

- Libros electrónicos
- Calculadoras-graficadoras especializadas para el análisis de funciones matemáticas o el análisis de espacios geométricos.
- Desarrollo de cuestionarios interactivos de reforzamiento.
- Desarrollo de material de difusión/ textos/ ejercicios en la red (Internet)

COMUNIDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y DE CIENCIAS

La facilidad que proporciona la Internet para publicar el material didáctico elaborado con un lenguaje simbólico, permite formar comunidades de profesores, investigadores y practicantes que intercambian continuamente experiencias y materiales en la red. Esta colaboración facilita la creación de bibliotecas digitales que diseminan las mejores prácticas y herramientas para el aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias en diferentes niveles y disciplinas.

Ejemplos de Cálculo Simbólico

El cálculo simbólico reproduce desde una computadora los conceptos, las reglas y las notaciones utilizadas en el álgebra tradicional.

Representación simbólica o algebraica de expresiones matemáticas

En un lenguaje de cálculo simbólico se utilizan los mismos símbolos que en el álgebra tradicional.

$$3x + 2y + 1$$

$$x^2 + y^2 + 25$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x+1) + (x-1)}$$

$$2x + 3y = 16$$

Simplificación de expresiones algebraicas (comando *Simplify*)

Normalmente la simplificación de expresiones algebraicas se realiza de manera automática como se observa en los siguientes ejemplos:

$$3(x+2) = 3\,x + 6$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x+1)} = x + 1$$

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{b} = \frac{5}{a} + \frac{7}{b}$$

Sin embargo, si intentamos simplificar la siguiente expresión tendríamos como resultado:

$$\frac{x^2 + 2\,x + 1}{x + 1} = \frac{x^2 + 2\,x + 1}{x + 1}$$

En estos casos es necesario utilizar el comando correspondiente de simplificación (***simplify***):

$$\frac{x^2 + 2\,x + 1}{x + 1} \text{ simplify } = x + 1$$

A continuación se muestran otros ejemplos de simplificación algebraica:

$$\frac{(1 - a)^3}{a - 1} \text{ simplify } = -(a - 1)^2$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2a\,x - 6a} \text{ simplify } = \frac{x - 2}{2\,a}$$

$$\frac{a\,x^2 - 9a}{3x - 3y - x^2 + x\,y} \text{ simplify } = -\frac{a\,(x + 3)}{x - y}$$

Expansión de expresiones algebraicas (comando/ función *Expand*)

Observemos el siguiente ejemplo.

Desarrollar la expresión:

$$3a\,(2a + b)$$

Si intentamos por los métodos anteriores obtendríamos:

Multiplicación directa:

$$3\,a(2a + b) = 3\,a(2\,a + b)$$

Simplificación:

$$3a(2a+b)\ \text{simplify} = 3\ a(2\ a+b)$$

El método directo de la multiplicación y el método de la simplificación no desarrollan la expresión; para esto utilizamos el comando ***expand***:

$$3a\ (2a+b)\ \text{expand}\ = 6\ a^2 + 3\ b\ a$$

Veamos otros dos ejemplos de expansión algebraica:

$$(a+b)(a+c)\ \text{expand}\ = a^2 + a\ b + a\ c + b\ c$$

$$3a\ \frac{a+b}{a^2}\ \text{expand}\ = \frac{3\ b}{a} + 3$$

Ejemplos de expansión algebraica aplicada a binomios y trinomios:

$$(x+y)^3\ \text{expand}\ = x^3 + 3\ x^2\ y + 3\ x\ y^2 + y^3$$

$$(x+y+z)^2\ \text{expand}\ = x^2 + 2\ x\ y + 2\ x\ z + y^2 + 2\ y\ z + z^2$$

Factorización de expresiones algebraicas (comando/ función *Factor*)

El comando ***factor*** se utiliza para simplificar expresiones algebraicas.

Factorización de polinomios:

$$3a^3 - 6a^2 \text{ factor } = 3\,a^2\,(a-2)$$

$$\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{6}a^3 \text{ factor } = \frac{a^2\,(a+1)}{3}$$

Factorización de diferencia de cuadrados:

$$x^2 - y^2 \text{ factor } = (x-y)\,(x+y)$$

$$\frac{1}{4}m^4 - n^6 \text{ factor } = \frac{\left(m^2 - 2\,n^3\right)\left(m^2 + 2\,n^3\right)}{4}$$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + 2x\,y + y^2 \text{ factor } = (x+y)^2$$

$$x^2 + 4\,x\,y + 4\,y^2 \text{ factor } = (x+2\,y)^2$$

Factorización de un trinomio de la forma:

$$x^2 + b\,x + c$$

$$x^2 - 5x + 6 \text{ factor } = (x-2)\,(x-3)$$

Definición de funciones

Los lenguajes de cálculo simbólico permiten al usuario definir sus propias funciones. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Función para el encontrar el doble de un número cualquiera:

$$f(x) := 2x$$

Ejemplos de uso:

$$f(4) \to 8$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \to \frac{1}{2}$$

Cálculos simbólicos:

$$f(a) \to 2\,a$$

$$f\left(\frac{z}{2}\right) \to z$$

Función para encontrar el área de un triángulo:

$$\text{Area\_Triángulo}(\text{Base}, \text{Altura}) := \frac{\text{Base}\ \text{Altura}}{2}$$

Ejemplos de uso:

$$\text{Area\_Triángulo}(10, 5) \to 25$$

Cálculo simbólico:

$$\text{Area\_Triángulo}(a, b) \to \frac{a\ b}{2}$$

Solución de ecuaciones (comando/ función *Solve*)

El comando utilizado para resolver ecuaciones es ***solve***.

Resolver la ecuación

$$6x - 7 = 2x + 1$$

$$6x - 7 = 2x + 1 \text{ solve}, x \ \ = 2$$

Resolver la ecuación

$$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4} \text{ solve}, x \ \ = 3$$

Resolver la ecuación

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \text{ solve}, x \ \ = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación

$$a\ x^2 + b\ x + c = 0$$

$$a\ x^2 + b\ x + c = 0 \text{ solve}, x \ \ = \begin{pmatrix} -\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}{2\ a} \\ -\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}{2\ a} \end{pmatrix}$$

Solución de un sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x + 3y = 16$$

$$3x - 7y = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y = 16 \\ 3x - 7y = 1 \end{pmatrix} \text{solve}, x, y, z \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema con tres variables

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + 2x = 5$$

$$x - y - 3x = 10$$

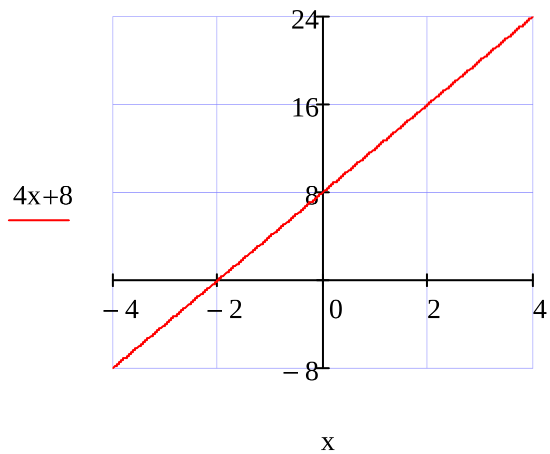
$$\begin{pmatrix} x + y + z = 6 \\ x - y + 2x = 5 \\ x - y - 3x = 10 \end{pmatrix} \text{solve}, x, y, z \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} -1 & -8 & 15 \end{pmatrix}$$

Solución gráfica de ecuaciones (comando/ función *Plot*)

Encontrar la solución gráfica de la siguiente ecuación

$$y = 4x + 8$$

Graficamos el lado derecho de la ecuación:



Con el comando solve tenemos el siguiente resultado:

$$4x + 8 \text{ solve } = -2$$

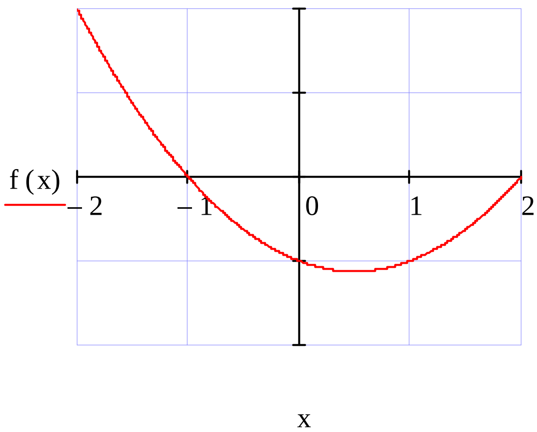
Encontrar la solución gráfica de la siguiente ecuación

$$y = x^2 - x - 2$$

Otra forma de resolver esta ecuación es escribirla en función de ***x***:

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

y graficar la función obtenida:



Utilizando el comando solve obtendríamos:

$$f(x)\ \text{solve}, x \ = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

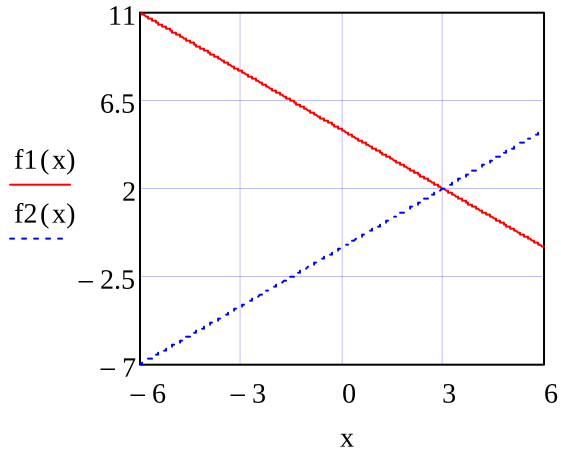
Representamos el par de ecuaciones como funciones para su graficación:

$$x + y = 5\ \text{solve}, y \ = \ 5 - x$$

$$f1(x) \ = \ 5 - x$$

$$x - y = 1\ \text{solve}, y \ = \ x - 1$$

$$f2(x) \ = \ x - 1$$



Utilizando el comando ***solve***:

$$\begin{pmatrix} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices y determinantes (comando/ función *Matrix*)

Suma y diferencia de matrices

Sumar y restar las siguientes matrices:

$$M1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad M1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M1 + N1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad M1 - N1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar

Multiplicar la siguiente matriz por 5:

$$M1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(M1)(5) = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ -10 & 25 & 10 \\ 0 & -5 & 25 \end{pmatrix}$$

Producto de dos matrices

Multiplicar las dos siguientes matrices:

$$A1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A1)\,(B1) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz

Invertir la siguiente matriz y multiplicar el resultado obtenido por la matiz original:

$$C1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad C1\,C1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinantes

Obtener el determinante de la siguiente matriz:

$$D2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|D2| = 0$$

Cálculo de sumatorias (comando/ función *Sum*)

Sumatoria numérica de los primeros cinco números naturales

$$\sum_{x=1}^{5} x = 15$$

Sumatoria simbólica de los primeros cinco números naturales.

$$\sum_{i=1}^{5} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

Sumatoria simbólica del inverso de los primeros cinco números naturales:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{n_i} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5}$$

Cálculo de productos (comando/ función *Mul*)

Producto numérico de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{i=1}^{5} i = 120$$

Producto simbólico de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{i=1}^{5} n_i = n_1\, n_2\, n_3\, n_4\, n_5$$

Producto simbólico del inverso de los primeros cinco números naturales:

$$\prod_{i=1}^{5} \frac{1}{n_i} = \frac{1}{n_1\, n_2\, n_3\, n_4\, n_5}$$

Cálculo de límites (comando/ función *Limit*)

Ejemplos básicos:

$$\lim_{x \to 3} \left(2x^2 + 1\right) = 19$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right) = 3$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = 4$$

Cálculos del límite por la izquierda y por la derecha:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$$

Cálculo de derivadas (comando/ función *Diff*)

Calcular la derivada de las siguientes expresiones y simplificar el resultado si es necesario:

$$x^5 + 3x^4 + x^3 + 10$$

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^5 + 3x^4 + x^3 + 10\right) = 5\,x^4 + 12\,x^3 + 3\,x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x}\right) = \frac{6\,x - 3\,x^2}{x - x^2} - \frac{\left(x^3 - 3\,x^2\right)(2\,x - 1)}{\left(x - x^2\right)^2}$$

$$\frac{6\,x - 3\,x^2}{x - x^2} - \frac{\left(x^3 - 3\,x^2\right)(2\,x - 1)}{\left(x - x^2\right)^2}\ \text{simplify} = \frac{2}{(x-1)^2} + 1$$

Cálculo de integrales (comando/ función *Int*)

Ejemplo de cálculo de integrales indefinidas:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$$

$$\int \left(x^2 + 5\right)^2 dx = \frac{x^5}{5} + \frac{10\,x^3}{3} + 25\,x$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

Ejemplos de cálculo de integrales definidas:

$$\int_0^3 x^2\,dx = 9$$

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + 1\right)^2 dx = \frac{56}{15}$$

$$\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$$

APLICACIONES GENERALES DEL CÁLCULO SIMBÓLICO EN EL SALÓN DE CLASES

Ejemplo 1

El siguiente ejemplo muestra el manejo algebraico tradicional versus el manejo simbólico para la solución de un sistema de ecuaciones.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1) \quad 7x + 4y = 13$$

$$(2) \quad 5x - 2y = 19$$

Método tradicional (igualación)

Despejar la incógnita X en el par dado de ecuaciones:

$$7x + 4y = 13$$

$$x = \frac{13 - 4y}{7}$$

$$5x - 2y = 19$$

$$x = \frac{19 + 2y}{5}$$

Igualar los valores obtenidos para las X:

$$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5}$$

Resolver en términos de Y la ecuación anterior:

$$5(13 - 4y) = 7(19 + 2y)$$

$$65 - 20y = 133 + 14y$$

$$-20y - 14y = 133 - 65$$

$$-34y = 68$$

$$y = -2$$

Sustituir el valor de la Y obtenida en la ecuación (1) se obtiene:

$$7x + 4(-2) = 13$$
$$7x - 8 = 13$$
$$x = 3$$

Solución dada con un lenguaje de cálculo simbólico:

$$\begin{pmatrix} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \;\; = \; (3 \;\; -2)$$

Reflexiones:

- En el método tradicional nos interesa el conocimiento pormenorizado del proceso algebraico para la solución del sistema de ecuaciones

  Este método tiene un enfoque didáctico. El estudiante y el profesor están interesados en conocer un método en particular para la solución de un sistema de ecuaciones.

- Con el uso del cálculo simbólico nos interesa únicamente la solución (independientemente del método utilizado por el sistema computacional para resolverlo)

  Este método tiene un enfoque de eficiencia: rapidez y exactitud. El profesor y el estudiante buscan únicamente la solución al sistema de ecuaciones dado.

Ejemplo 2

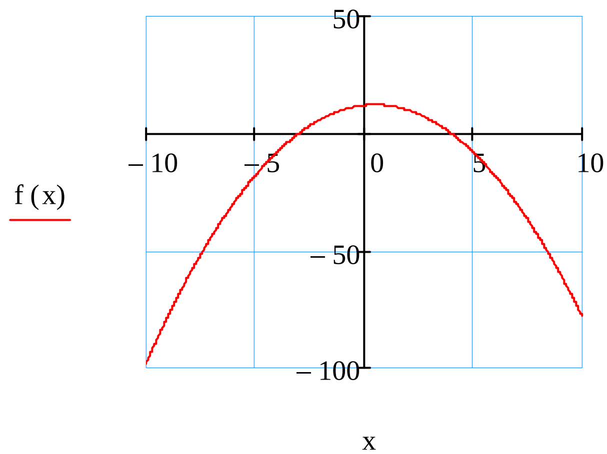
Supongamos que la ecuación $-x^2 + x = -12$ representa el comportamiento seguido por una pelota de beisbol después de que un jugador le ha pegado con cierta velocidad y con cierto ángulo. Calcular los siguientes datos:

a) El alcance horizontal de la pelota y
b) la altura máxima alcanzada.

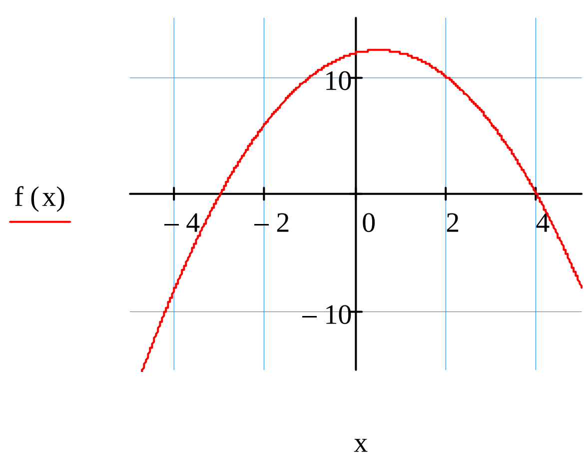
Solución

Para facilitar la solución del problema, vamos establecer la ecuación en función de ***x*** y graficarla:

$$f(x) = -x^2 + x + 12$$



Ajustemos los parámetros originales para tener un mayor acercamiento a la gráfica (zoom):



Vamos a encontrar los puntos de intercepción con el eje de las X:

$$f(x)\ \text{solve}\ = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los puntos de intercepción son x1 = -3 y x2 = 4.

Para encontrar el alcance horizontal de la pelota, *supondremos* que la pelota ha sido golpeada en el punto x1 y que la pelota toca el suelo en punto x2:

Distancia horizontal x2 – x1 = 4 – (-3) = 7 (unidades de distancia)

En una ecuación de la forma $y = a\,x^2 + \ b\,x + c$ el vértice de la parábola viene dado por

$$V(-\frac{b}{2\,a},\frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a})$$

Sustituyendo los valores de a, b y c de la ecuación dada en la fórmula obtenemos:

$$a = -1$$

$$b = 1$$

$$c = 12$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{4a\ c - b^2}{4a} = \frac{49}{4} = 12.25$$

La altura máxima la alcanza en el punto X = 0.5 y es de Y = 12.25 (unidades de altura).

Reflexiones:

- En este caso, el método seguido para la solución de la ecuación de segundo grado no es tan relevante como lo es la comprensión de lo que representa en sí la misma ecuación:
    - Una parábola
    - El punto máximo (o mínimo) de la parábola dado por su vértice
    - Los puntos de corte en el eje de las X (dadas en la solución de la ecuación)

  Estos tres elementos nos conducen a la solución del problema:

    - El punto de arranque de la bola (los puntos de corte en el eje de las X)
    - La máxima altura alcanzada (el vértice de la parábola)

  En este ejemplo, toma relevancia el uso de una calculadora o de un paquete computacional para centrarse en el problema y su solución, y dejar en segundo término el método algebraico o de procedimiento.

Aplicaciones en Trigonometría

Gráficas de funciones trigonométricas

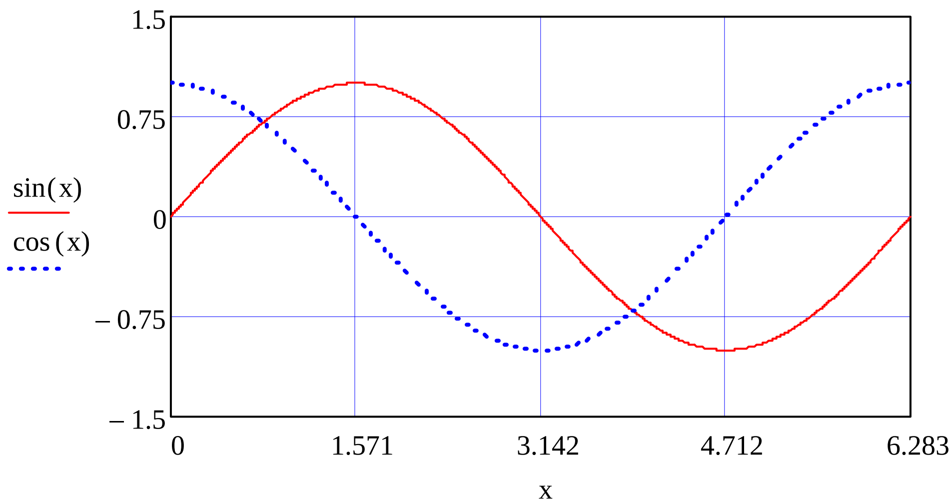
Ejemplo 1

Graficar las funciones seno y coseno en el rango de 0 a 2π.

Solución

Definir el rango de graficación:

$x0 = \pi \qquad x1 = 2\pi$



Ejemplo 2

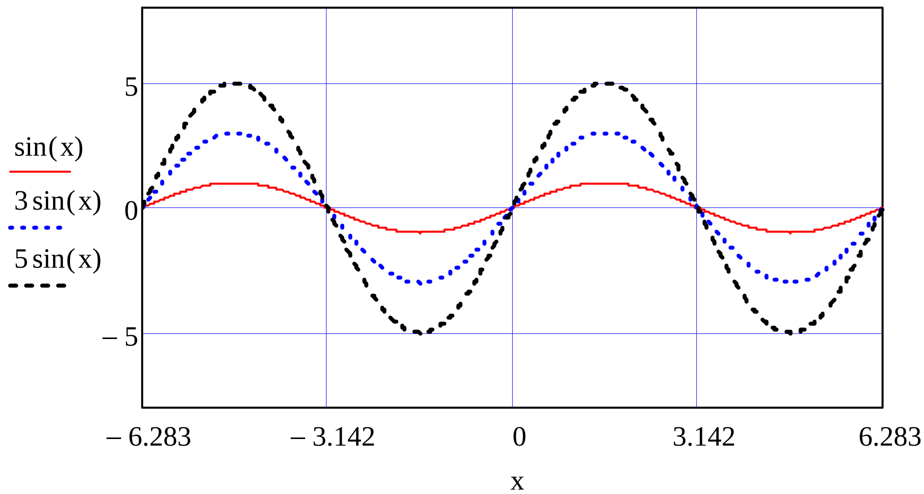
Graficar las funciones $seno(x)$, $3\ seno(x)$ y $5\ seno(x)$ en el rango de -2π a 2π. Observar el efecto del coeficiente de la función en *amplitud* de la función.

Solución

Definir el rango de graficación:

$x0 = -2\,\pi, x1 = 2\pi$

Graficar las funciones:



Ejemplo 3

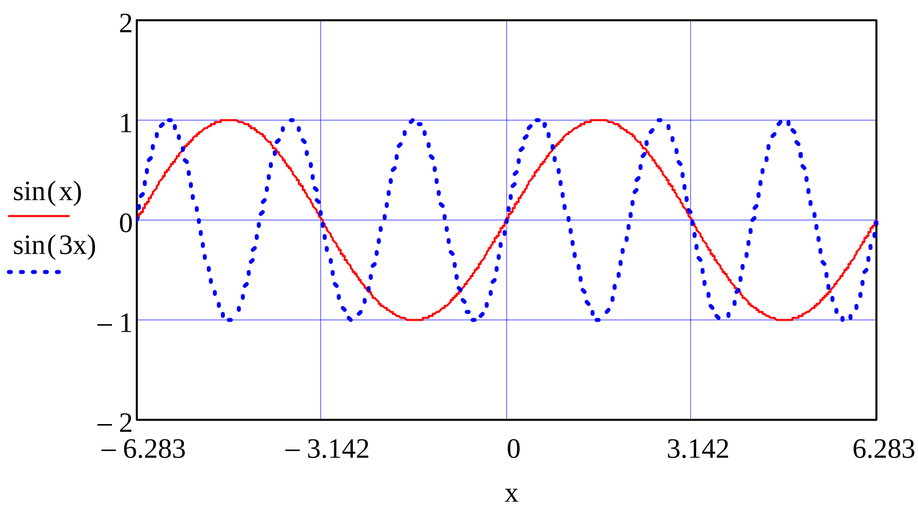
Graficar las funciones $seno(x)$ y $seno(3x)$ en el rango de -2π a 2π. Observar el efecto del coeficiente de la X, en el argumento de la función, sobre la *frecuencia* de la función.

Solución

Definir el rango de graficación:

$x0 = -2\pi \qquad x1 = 2\pi$

Graficar las funciones:



Ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 4

Resuélvase la siguiente ecuación para valores no negativos de θ y menores de 2π. Grafique la ecuación.

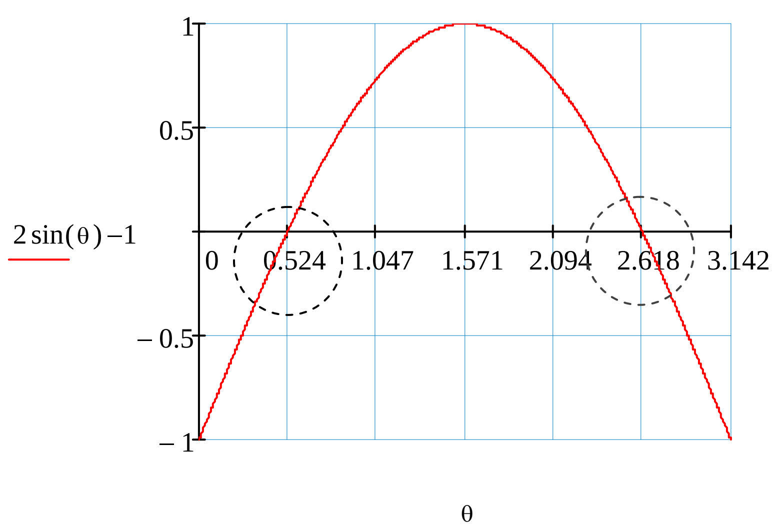
$$2\sin(\theta) - 1 = 0$$

Solución

$$2\sin(\theta) - 1 = 0 \text{ solve}, \theta \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{5\pi}{6} \end{pmatrix}$$

Para observar mejor los puntos de corte en el eje de las θ , convertiremos los resultados obtenidos a un número real de tres decimales y graficaremos la función en un rango de 0 a π.

$$\frac{\pi}{6} = 0.524 \qquad\qquad \frac{5\pi}{6} = 2.618$$



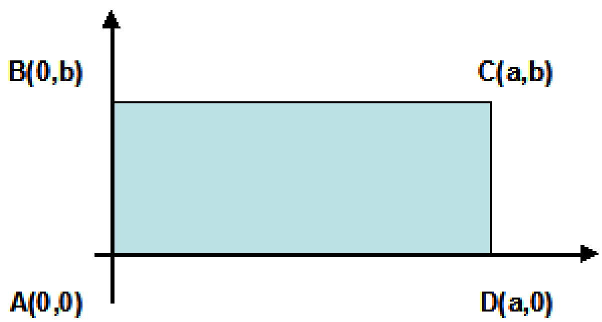
APLICACIONES EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

Distancia entre dos puntos

Ejemplo

Demostrar analíticamente que las diagonales de un rectángulo ABCD son iguales.

Solución



Definir los cuatro puntos que forman las diagonales:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definir una fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos dados:

$$\text{Distancia}(P, Q) = \sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2}$$

Utilizar la fórmula de distancia definida anteriormente para encontrar la longitud de las diagonales.

Distancia entre la diagonal AC:

$$\text{Distancia}(A, C) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Distancia entre la diagonal BD:

$$\text{Distancia}(B, D) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

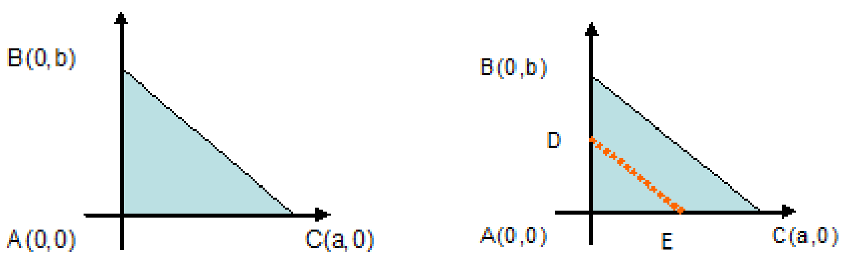
El resultado encontrado demuestra que las diagonales son iguales.

Punto Medio

Ejemplo

Demostrar analíticamente que el segmento que une los puntos medios de los dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Solución



Solución

Definir los tres puntos que determinan el triángulo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definir una fórmula para encontrar el punto medio entre dos puntos dados:

$$\text{PuntoMedio}(X, Y) = \begin{pmatrix} \dfrac{X_1 + Y_1}{2} \\ \dfrac{X_2 + Y_2}{2} \end{pmatrix}$$

Consideremos los puntos medios de los lados AB y AC:

$$D := \text{PuntoMedio}(A, B)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

$$E := \text{PuntoMedio}(A, C)$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la longitud del segmento DE que une los puntos medios del triángulo:

(1) $\quad DE := \text{Distancia}(D, E)$

$$DE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

Simplificando el resultado obtenido (asumimos que el valor de a y b son mayores que cero):

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume}, \text{ALL} > 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Calculemos la longitud del tercer lado paralelo y que es paralelo al segmento DE:

$$BC := \text{Distancia}(B, C)$$

$$BC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dividamos el resultado obtenido entre dos:

$$\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Al dividir entre dos la longitud del segmento BC, obtenemos el mismo valor que el obtenido para DE en la expresión (1).

Línea recta

Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados

TEOREMA

La ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por:

$$y - y_2 = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})(x - x_2)$$

con $x_1 \neq x_2$

Ejemplo

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P1 (-10, -5) y P2 (0, 5); graficar la ecuación obtenida, calcular su pendiente y ángulo de inclinación, y determinar las coordenadas de corte en el eje X y en el eje Y.

Solución

Definición numérica de los puntos:

$$P1 := \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad P2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Definición de la recta en función de dos puntos:

$$\mathrm{recta}(A, B, x) := \frac{B_2 - A_2}{B_1 - A_1}\left(x - A_1\right) + A_2$$

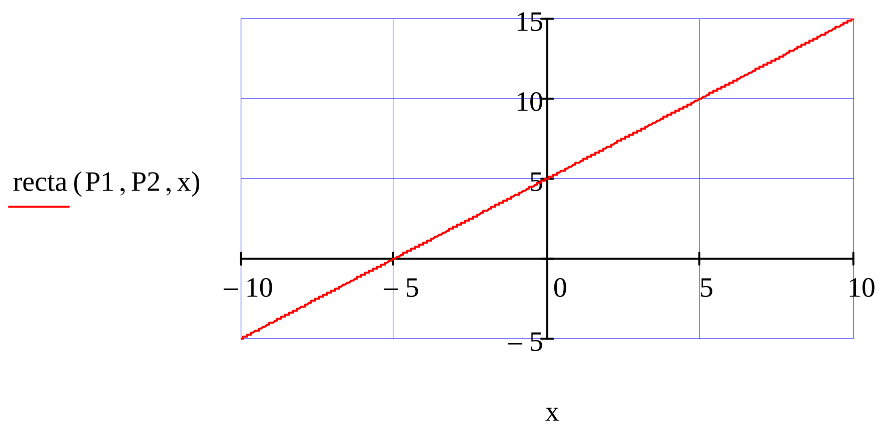
Definición de la pendiente de la recta:

$$m(A, B) := \frac{B_2 - A_2}{B_1 - A_1}$$

Cálculo de la ecuación simbólica de la recta:

$$\text{recta}(P1, P2, x) = x + 5$$

Graficar la función:



Cálculo de la pendiente y ángulo de inclinación:

$$m(P1, P2) = 1$$
$$\text{atan}(m(P1, P2)) = 45\ \text{deg}$$

Punto de corte en ***X*** *(cuando y = 0):*

$$y = 0$$
$$\text{recta}(P1, P2, x) = y \text{ solve}, x = -5$$

Punto de corte en ***Y*** *(cuando x = 0):*

$$x = 0$$
$$\text{recta}(P1, P2, x) = 5$$

Ecuación de una recta forma pendiente y ordenada al origen

TEOREMA

La ecuación de una recta (no paralela al eje Y) que corta o intercepta al eje Y en el punto *(0, b),* y tiene una pendiente igual a *m* es:

$$y = m\,x + b$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta con pendiente *m = 1* y con ordenada en el origen *b =-5*. Graficar la ecuación encontrada y calcular el grado de inclinación de su pendiente

Solución

Definir los valores para m y para b:

$$m := 1 \qquad b := -5$$

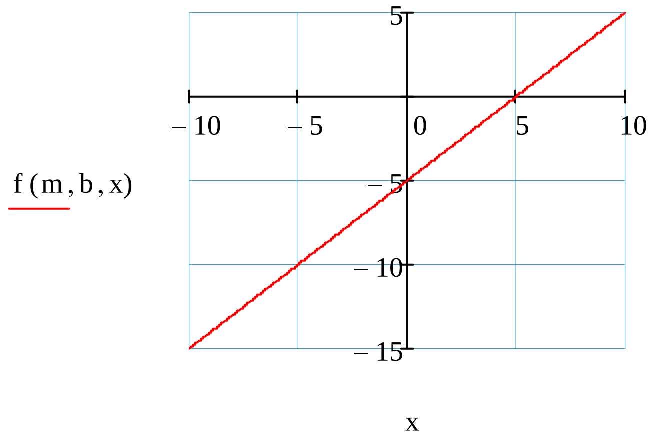
Definir la fórmula en términos de m, b y x:

$$f(m,b,x) = m\,x + b$$

Encontrar la ecuación de la recta solicitada:

$$f(m,b,x) \rightarrow x - 5$$

A partir de la función definida graficar la función:



Calcular el ángulo de pendiente de la recta:

$$\mathrm{atan}(m) = 45\,\mathrm{deg}$$

Ángulo entre dos rectas

TEOREMA

Dadas dos recta L_1 y L_2, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, el ángulo β que se forma cuando se va de L_1 a L_2 en la dirección contraria a las de las manecillas del reloj está dada por

$$\tan(\beta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

con $m_1 m_2 \neq -1$

Ejemplo

Encuentre el ángulo entre las rectas:

$$x + 3y + 2 = 0$$

$$-x + 3y + 5 = 0$$

Primera Solución

Definimos los valores de A1, B1, A2 y B2 para las ecuaciones dadas:

$$A_1 := 1 \qquad B_1 := 3 \qquad A_2 := -1 \qquad B_2 := 3$$

Calculamos las pendientes de cada una de las rectas:

$$m1 := -\frac{A_1}{B_1} \rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$m2 := -\frac{A_2}{B_2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Calculamos el ángulo entre las dos rectas:

$$\tan\beta := \frac{m1 - m2}{1 + m1\ m2} \rightarrow -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{atan}(\tan\beta)\ \frac{180}{\pi} = -36.87$$

Segunda solución

Aislando los coeficientes de la primera ecuación y calculando la primera pendiente:

$$A := x + 3y + 2 \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 3\ y + 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B := x + 3y + 2 \text{ coeffs}, y \rightarrow \begin{pmatrix} x + 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 := A_2 \rightarrow 1$$

$$B_1 := B_2 \rightarrow 3$$

$$m_1 := -\frac{A_1}{B_1} \rightarrow -\frac{1}{3}$$

Aislando los coeficientes de la segunda ecuación y calculando la segunda pendiente:

$$A := -x + 3y + 5 \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 3\ y + 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B := -x + 3y + 5 \text{ coeffs}, y \rightarrow \begin{pmatrix} 5 - x \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 := A_2 \rightarrow -1$$

$$B_2 := B_2 \rightarrow 3$$

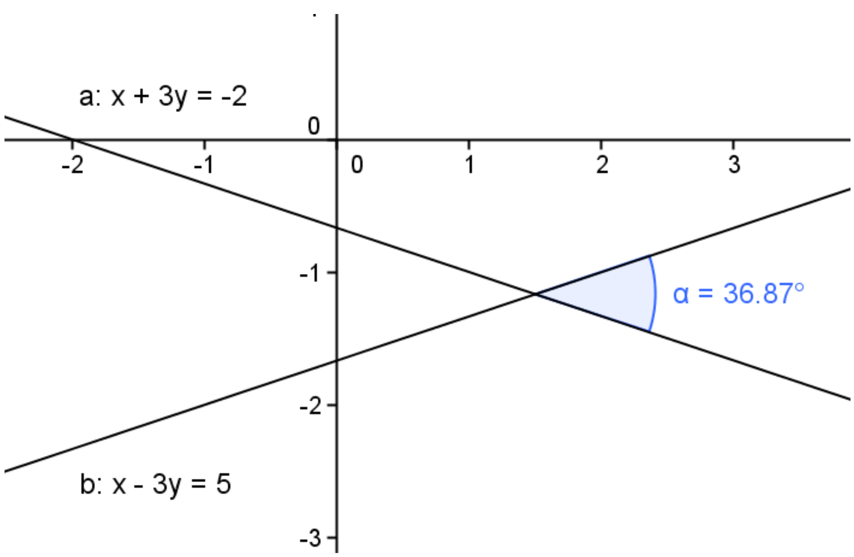
$$m_2 := -\frac{A_2}{B_2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Calculando el ángulo entre las dos rectas:

$$\tan\beta := \frac{m1 - m2}{1 + m1\ m2} \rightarrow -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{atan}(\tan\beta)\frac{180}{\pi} = -36.87$$

Solución gráfica dada por Geogebra:



Triángulos

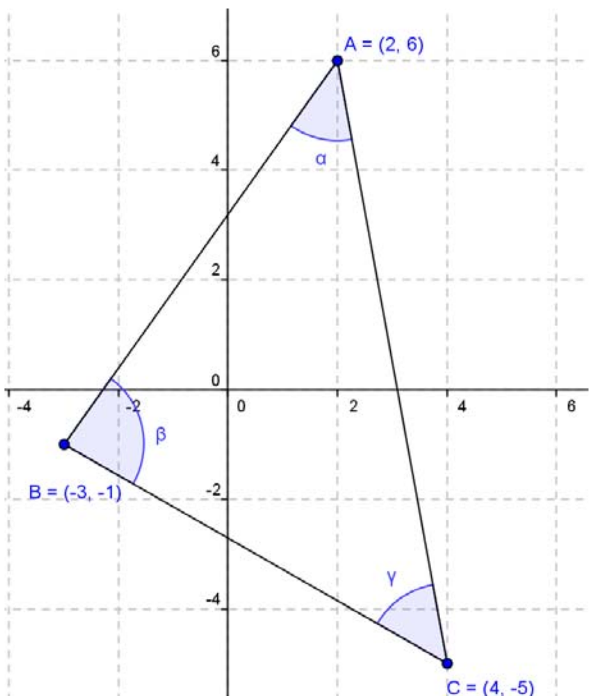
Cálculo de los ángulos interiores de un triángulo

Ejemplo

¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos A (2, 6), B (-3, -1) y C (4, -5)?

Solución

Representación gráfica del problema:



Fórmula para calcular la pendiente entre dos puntos dados:

$$m := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Representación de los puntos y la pendiente en Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

$$m := \frac{B_2 - A_2}{B_1 - A1}$$

Cálculo del ángulo α entre los lados AB y AC:

$$m1 := \frac{B_2 - A_2}{B_1 - A_1} \rightarrow \frac{7}{5}$$

$$m3 := \frac{C_2 - A_2}{C_1 - A_1} \rightarrow -\frac{11}{2}$$

$$\tan\alpha := \frac{m3 - m1}{1 + m3\ m1} \rightarrow \frac{69}{67}$$

$$\alpha := \operatorname{atan}(\tan\alpha)\frac{180}{\pi} = 45.843$$

Cálculo del ángulo β entre los lados AB y BC:

$$m2 := \frac{B_2 - C_2}{B_1 - C_1} \rightarrow -\frac{4}{7}$$

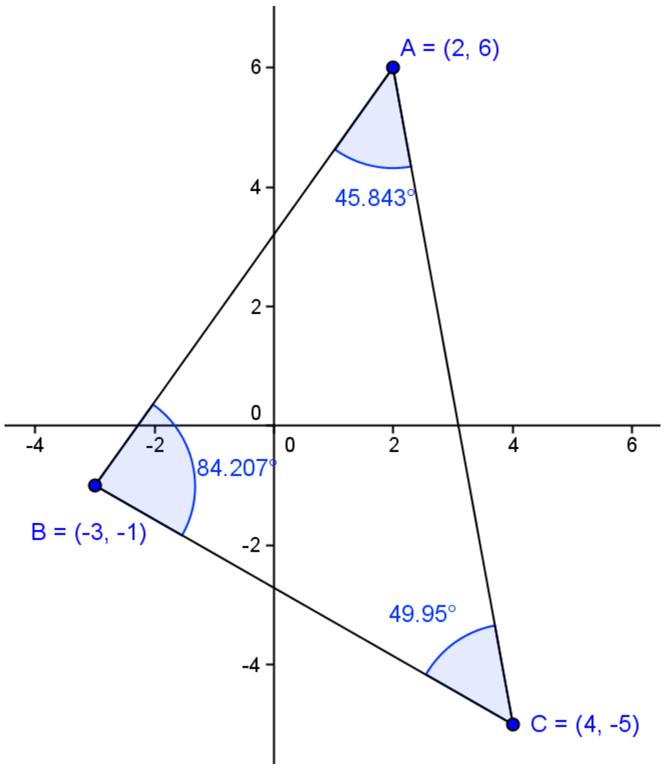
$$\tan\beta := \frac{m1 - m2}{1 + m1\ m2} \rightarrow \frac{69}{7}$$

$$\beta := \operatorname{atan}(\tan\beta)\frac{180}{\pi} = 84.207$$

Cálculo del tercer ángulo γ del triángulo:

$$\gamma := 180 - \alpha - \beta = 49.95$$

Solución gráfica dada por Geogebra:



Cálculo del área de un triángulo

Ejemplo

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son A (-1, 1), B (3, 4) y C (5, -1).

Primera solución

Dadas las coordenadas de los vértices, el área de un triángulo viene dada por la siguiente fórmula:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \left|(y1 - y3) \cdot x2 - (x1 - x3) \cdot y2 + x1 \cdot y3 - x3 \cdot y1\right|$$

Definir los vértices dados en términos de Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Su equivalente en coordenadas X, Y es el siguiente:

$$x1 := A_1 \quad y1 := A_2 \quad x2 := B_1 \quad y2 := B_2 \quad x3 := C_1 \quad y3 := C_2$$

Definir el área en términos de Mathcad y calcular su valor:

$$K := \frac{1}{2} \cdot \left|(y1 - y3) \cdot x2 - (x1 - x3) \cdot y2 + x1 \cdot y3 - x3 \cdot y1\right|$$

$$K \rightarrow 13$$

Segunda solución

La fórmula

$$K = \frac{1}{2} \cdot \left|(y1 - y3) \cdot x2 - (x1 - x3) \cdot y2 + x1 \cdot y3 - x3 \cdot y1\right|$$

Se puede expresar en términos de un determinante:

$$K := \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Donde

$$x1 := A_1 \qquad y1 := A_2 \qquad x2 := B_1 \qquad y2 := B_2 \qquad x3 := C_1 \qquad y3 := C_2$$

Obtenemos:

$$K \rightarrow 13$$

Tercera solución

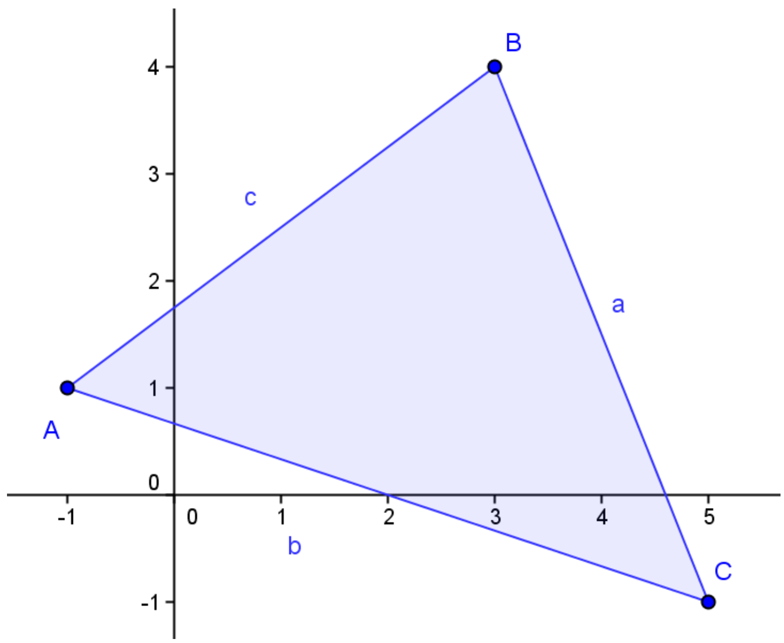
Se puede obtener el área de un triángulo en función de la longitud de cada uno de sus lados utilizando la fórmula de Herón:

$$K = \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde *a, b* y *c* representan cada una de las longitudes del triángulo y *s* viene dada por la fórmula:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Gráficamente podemos observar el triángulo dado de la siguiente manera:



Para calcular la longitud de cada uno de los lados, definimos la siguiente fórmula (distancia entre dos puntos dados):

$$\text{Longitud}(P, Q) := \sqrt{\left(P_1 - Q_1\right)^2 + \left(P_2 - Q_2\right)^2}$$

Calculamos la longitud de cada uno de los lados.

Lado BC:

$$a := \mathrm{Longitud}(B,C) \rightarrow \sqrt{29} \qquad a = 5.385$$

Lado AC:

$$b := \mathrm{Longitud}(A,C) \rightarrow 2\cdot\sqrt{10} \qquad b = 6.325$$

Lado AB:

$$c := \mathrm{Longitud}(A,B) \rightarrow 5$$

Calculamos el valor de s y de K (área del triángulo):

$$s := \frac{1}{2}(a + b + c)$$

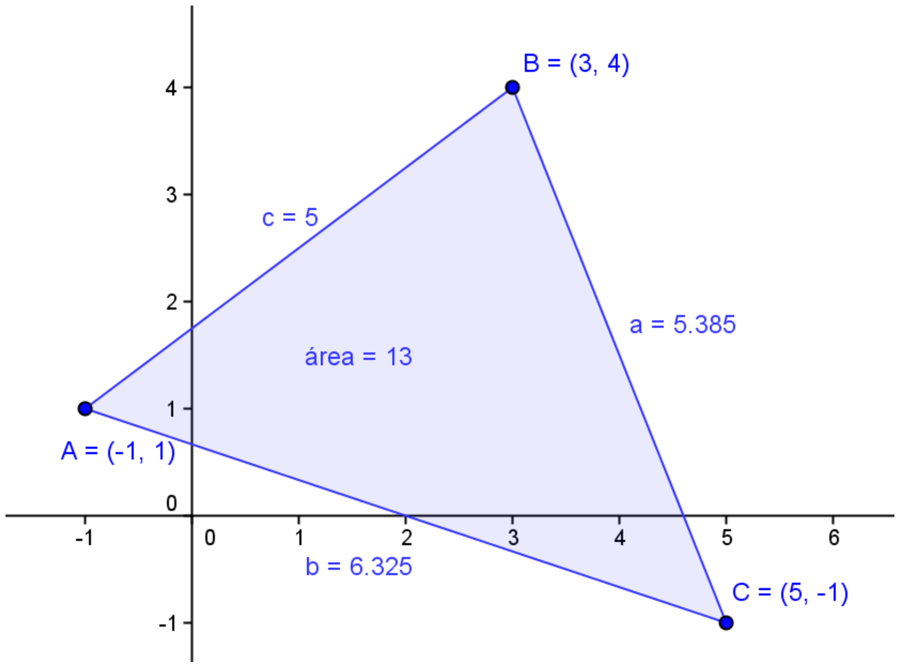
$$s \rightarrow \sqrt{10} + \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{5}{2}$$

$$K := \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$K \rightarrow \sqrt{\left(\sqrt{10} - \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{5}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{10} + \frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{5}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{10} + \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{29}}{2} - \sqrt{10} + \frac{5}{2}\right)}$$

$$K \ \mathrm{simplify} \rightarrow 13$$

Solución gráfica dada por Geogebra:



Cálculo del baricentro/ centroide de un triángulo

Ejemplo

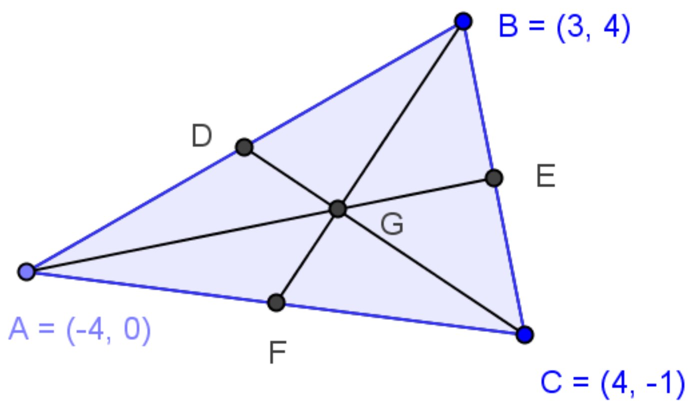
Los vértices de un triángulo son los siguientes: A (-4, 0), B (3, 4) y C (4, -1). Encontrar el baricentro del triángulo.

Solución

Mediana: recta que pasa por el vértice y por el punto medio del lado opuesto.

Baricentro: punto de intersección de las medianas de un triángulo.

Representación visual del problema (Geogebra):



Definir la fórmula para calcular el punto medio de un segmento:

$$\text{PuntoMedio}(X, Y) := \begin{pmatrix} \dfrac{X_1 + Y_1}{2} \\ \dfrac{X_2 + Y_2}{2} \end{pmatrix}$$

Definir los tres puntos dados:

$$A := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calcular los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo:

$$D := \mathrm{PuntoMedio}(A, B) \qquad E := \mathrm{PuntoMedio}(B, C) \qquad F := \mathrm{PuntoMedio}(A, C)$$

$$D \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad F \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Definir la fórmula para calcular la ecuación de las mediatrices:

$$f(A, B, x) := \frac{B_2 - A_2}{B_1 - A_1} \cdot \left(x - A_1\right) + A_2$$

Calcular las ecuaciones de las mediatrices:

$$l1 := f(A, E, x) \qquad l1 \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{4}{5}$$

$$l2 := f(B, F, x) \qquad l2 \rightarrow \frac{3 \cdot x}{2} - \frac{1}{2}$$

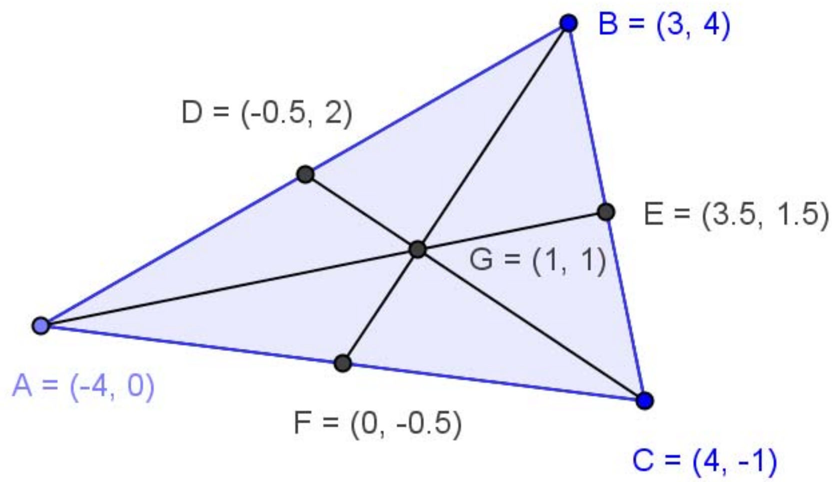
$$l3 := f(C, D, x) \qquad l3 \rightarrow \frac{5}{3} - \frac{2 \cdot x}{3}$$

Calcular el punto de intersección (baricentro/ centroide) de dos de las mediatrices:

$$\begin{pmatrix} l1 = y \\ l2 = y \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l1 = y \\ l3 = y \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Baricentro/ centroide. Representación gráfica de la solución dada por Geogebra.



Nota. El punto de intersección de las medianas también se puede encontrar mediante la siguiente fórmula:

$$\mathrm{Interseccion}(A, B, C) := \begin{pmatrix} \dfrac{A_1}{3} + \dfrac{B_1}{3} + \dfrac{C_1}{3} \\ \dfrac{A_2}{3} + \dfrac{B_2}{3} + \dfrac{C_2}{3} \end{pmatrix}$$

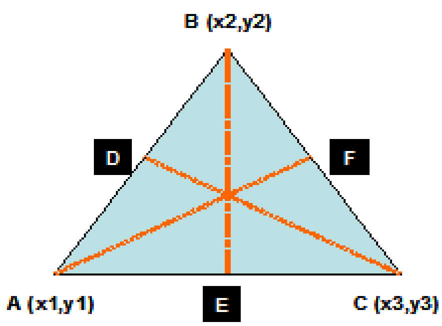
$$\mathrm{Interseccion}(A, B, C) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Demostrar que si un triángulo tiene los vértices en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, el punto de intersección de sus medianas está en $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_2}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_2}{3}\right)$

Para este ejercicio, tome en cuenta que las medianas del triángulo concurren en un punto que está a dos tercios de la distancia de cada vértice a la mitad de su lado opuesto.

Solución



Definir los tres puntos que determinan el triángulo:

$$A := \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} x3 \\ y3 \end{pmatrix}$$

Definir la fórmula para calcular el punto medio de un segmento:

$$\text{PuntoMedio}(X, Y) := \begin{pmatrix} \dfrac{X_1 + Y_1}{2} \\ \dfrac{X_2 + Y_2}{2} \end{pmatrix}$$

Calcular cada uno de los puntos medios de los lados de la figura dada:

$$D := \text{PuntoMedio}(A, B)$$

$$D \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x1}{2} + \frac{x2}{2} \\ \frac{y1}{2} + \frac{y2}{2} \end{pmatrix}$$

$$E := \mathrm{PuntoMedio}(A, C)$$

$$E \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x1}{2} + \frac{x3}{2} \\ \frac{y1}{2} + \frac{y3}{2} \end{pmatrix}$$

$$F := \mathrm{PuntoMedio}(B, C)$$

$$F \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x2}{2} + \frac{x3}{2} \\ \frac{y2}{2} + \frac{y3}{2} \end{pmatrix}$$

Definir la fórmula que calcula el punto de división de un segmento en una razón dada:

$$\mathrm{PuntoRazon}(A, B, r) := \begin{bmatrix} A_1 + r \cdot (B_1 - A_1) \\ A_2 + r \cdot (B_2 - A_2) \end{bmatrix}$$

Definir la razón:

$$razon := \frac{2}{3}$$

Calcular las coordenadas del punto que se encuentra a 2/3 del vértice de A:

$$\mathrm{PuntoRazon}(A, F, razon) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x1}{3} + \frac{x2}{3} + \frac{x3}{3} \\ \frac{y1}{3} + \frac{y2}{3} + \frac{y3}{3} \end{pmatrix}$$

Calcular las coordenadas del punto que se encuentra a 2/3 del vértice de B:

$$\mathrm{PuntoRazon}(B,E,razon) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x1}{3}+\frac{x2}{3}+\frac{x3}{3} \\ \frac{y1}{3}+\frac{y2}{3}+\frac{y3}{3} \end{pmatrix}$$

Calcular las coordenadas del punto que se encuentra a 2/3 del vértice de C:

$$\mathrm{PuntoRazon}(C,D,razon) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x1}{3}+\frac{x2}{3}+\frac{x3}{3} \\ \frac{y1}{3}+\frac{y2}{3}+\frac{y3}{3} \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del punto de intersección de los segmentos AF, BE y CD son iguales.

Cálculo del ortocentro de un triángulo

Ejemplo

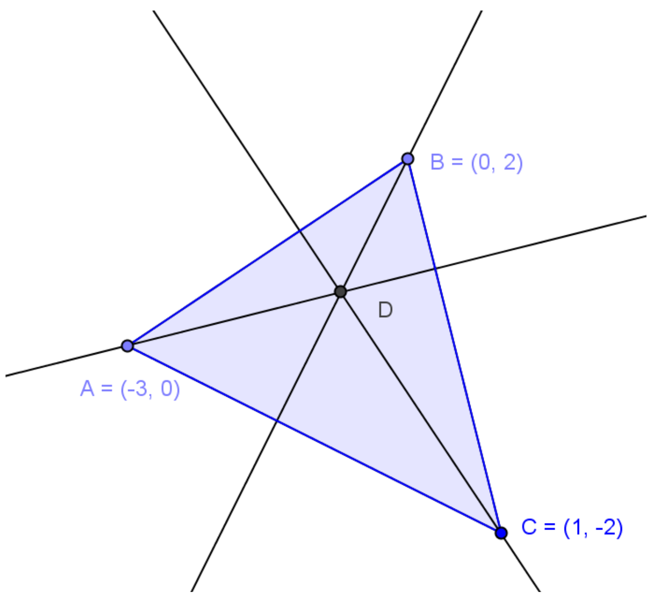
Los vértices de un triángulo son los siguientes: A (-3, 0), B (0, 2) y C (1, -2). Encontrar las ecuaciones de cada uno de sus lados y el ortocentro.

Solución

Altura de un triángulo: es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto.

Ortocentro: Intersección de las tres alturas del triángulo.

Representación visual del problema (Geogebra):



Definir los tres puntos dados:

$$A := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Definir la fórmula para calcular la pendiente entre dos puntos:

$$m(A,B) := \frac{B_2 - A_2}{B_1 - A_1}$$

Calcular la pendiente para cada uno de los lados del triángulo:

Lado AB:

$$mAB := m(A,B)$$

$$mAB \rightarrow \frac{2}{3}$$

Lado BC:

$$mBC := m(B,C)$$

$$mBC \rightarrow -4$$

Lado CA:

$$mCA := m(C,A)$$

$$mCA \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Definir la fórmula punto-pendiente para calcular cada una de las ecuaciones de las alturas:

$$f(A,m,x) := m \cdot \left(x - A_1\right) + A_2$$

Altura que pasa por A (perpendicular a BC):

$$m := \frac{-1}{mBC}$$

$$eqA := y = f(A,m,x) \rightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{3}{4}$$

Altura que pasa por B (perpendicular a CA):

$$m := \frac{-1}{mCA}$$

$$eqB := y = f(B, m, x) \rightarrow y = 2 \cdot x + 2$$

Altura que pasa por C (perpendicular a AB):

$$m := \frac{-1}{mAB}$$

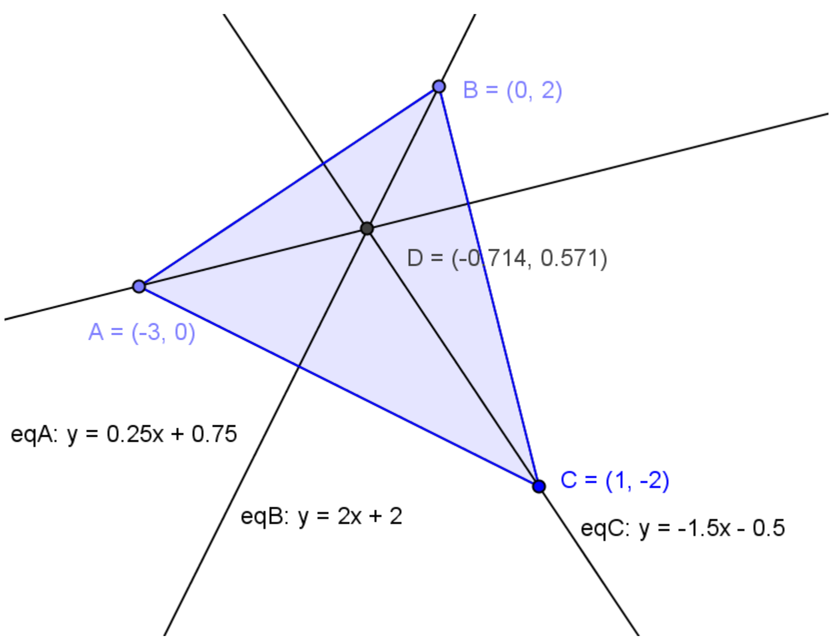
$$eqC := y = f(C, m, x) \rightarrow y = -\frac{3 \cdot x}{2} - \frac{1}{2}$$

Calcular el punto de intersección de dos de las alturas:

$$\begin{pmatrix} eqA \\ eqB \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.714 & 0.571 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} eqA \\ eqC \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.714 & 0.571 \end{pmatrix}$$

Ortocentro. Representación gráfica de la solución dada por Geogebra.



Circunferencia

Ejemplo 1

Encontrar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $3x - 4y - 4 = 0$ y cuyo centro está sobre las rectas $5x - y + 7 = 0$, $x - 4y + 9 = 0$. Graficar cada una de las ecuaciones que intervienen en el problema.

Solución

Encontrar el centro de la circunferencia (la intercepción entre las dos rectas):

$$\text{Centro} := \begin{pmatrix} 5x - y + 7 = 0 \\ x - 4y + 9 = 0 \end{pmatrix} \text{solve}, x, y \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar las coordenadas ***h*** y ***k*** del centro obtenido (el resultado viene dado en un vector de una columna y dos filas)

$$h := \text{Centro}_{1,1} \qquad h \rightarrow -1$$

$$k := \text{Centro}_{1,2} \qquad k \rightarrow 2$$

Calcular la longitud del radio (la distancia del centro a la tangente de la circunferencia).

Fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta:

$$\text{distancia}(A, B, C, x1, y1) := \frac{|A\ x1 + B\ y1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Asignar los valores de los coeficientes de la tangente dada

$$A := 3 \qquad B := -4 \qquad C := -4$$

y las coordenadas del centro en la fórmula de distancia para obtener el radio

$$r := \text{distancia}(A, B, C, h, k)$$

Sustituir las coordenadas del centro y el radio en la fórmula general para obtener la circunferencia pedida:

$$\text{Circunferencia} = (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ simplify} \rightarrow x^2 + 2\,x + y^2 - 4\,y + 5 = 9$$

$$\text{Circunferencia} \rightarrow x^2 + 2\,x + y^2 - 4\,y + 5 = 9$$

Visualizar gráficamente el problema.

Para graficar las rectas dadas y la circunferencia encontrada, ponemos cada una de las ecuaciones en función de x.

Rectas del centro:

$$f1(x) := 5x - y + 7 = 0 \text{ solve}, y \rightarrow 5\,x + 7$$

$$f1(x) \rightarrow 5\,x + 7$$

$$f2(x) := x - 4y + 9 = 0 \text{ solve}, y \rightarrow \frac{x}{4} + \frac{9}{4}$$

$$f2(x) \rightarrow \frac{x}{4} + \frac{9}{4}$$

Recta tangente:

$$f3(x) := 3x - 4y - 4 = 0 \text{ solve}, y \rightarrow \frac{3\,x}{4} - 1$$

$$f3(x) \rightarrow \frac{3\,x}{4} - 1$$

Circunferencia encontrada:

$$\text{Cir}(x) := \text{Circunferencia solve}, y \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{-(x-2)\,(x+4)} + 2 \\ 2 - \sqrt{-(x-2)\,(x+4)} \end{bmatrix}$$

La solución de la circunferencia nos devuelve dos medias circunferencias (el resultado dado es un vector de una columna y dos filas):

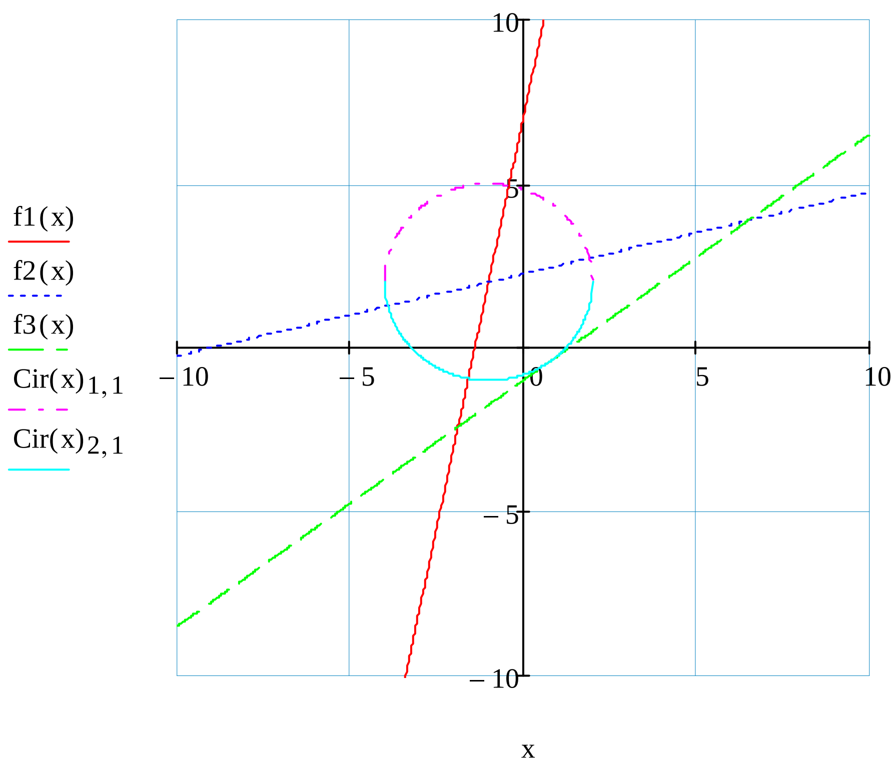
Primera circunferencia:

$$\text{Cir}(x)_{1,1} \rightarrow \sqrt{-(x-2)\,(x+4)} + 2$$

Segunda circunferencia:

$$\text{Cir}(x)_{2,1} \rightarrow 2 - \sqrt{-(x-2)\,(x+4)}$$

Gráfica final



Ejemplo 2

Deducir una(s) ecuación(es) del o de los círculos de radio 4, cuyo centro está en la recta $4x + 3y + 7 = 0$ y es (o son) tangentes a $3x + 4y + 34 = 0$.

Solución

Disponemos de tres condiciones para resolver el problema:

1. El radio

$$\text{radio} := 4$$

2. Un punto cualquiera (h, k) que pase por la circunferencia debe también satisfacer a la recta que pasa por el centro:

$$4h + 3k + 7 = 0$$

3. La fórmula de distancia de un punto (el centro de la recta) a una recta (la tangente a la recta):

$$\text{distancia} := \frac{|A \cdot x1 + B \cdot y1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\frac{|3 \cdot h + 4 \cdot k + 34|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \text{radio}$$

Con estas tres condiciones podemos plantear un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de las coordenadas del centro, h y k.

$$\text{Centro1} := \begin{pmatrix} 4h + 3k + 7 = 0 \\ \dfrac{|3 \cdot h + 4 \cdot k + 34|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \text{radio} \end{pmatrix}$$

El valor absoluto del numerador nos da dos valores.

Primera solución (valor positivo):

$$\text{Centro1} := \begin{pmatrix} 4h + 3k + 7 = 0 \\ \dfrac{3\cdot h + 4\cdot k + 34}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \text{radio} \end{pmatrix} \text{solve}, h, k \rightarrow (2 \quad -5)$$

$$h := \text{Centro1}_{1,1} \qquad h \rightarrow 2$$

$$k := \text{Centro1}_{1,2} \qquad k \rightarrow -5$$

Sustituyendo el valor de h y k obtenidos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = \text{radio}^2 \rightarrow (x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$$

Expandiendo la expresión resultante:

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 - 16 = 0 \text{ expand } \rightarrow x^2 - 4\cdot x + y^2 + 10\cdot y + 13 = 0$$

Segunda solución (valor negativo)

Reiniciar valores para el segundo cálculo

$$h := h \qquad k := k$$

$$\text{Centro2} := \begin{pmatrix} 4h + 3k + 7 = 0 \\ \dfrac{3\cdot h + 4\cdot k + 34}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\text{radio} \end{pmatrix} \text{solve}, h, k \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{134}{7} & -\dfrac{195}{7} \end{pmatrix}$$

$$h := \text{Centro2}_{1,1}$$

$$k := \text{Centro2}_{1,2}$$

Sustituyendo el valor de h y k previamente calculados:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = \text{radio}^2 \rightarrow \left(x - \frac{134}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{195}{7}\right)^2 = 16$$

Expandiendo la expresión encontrada:

$$\left(x-\frac{134}{7}\right)^2+\left(y+\frac{195}{7}\right)^2 = 16 \text{ expand } \rightarrow x^2-\frac{268\cdot x}{7}+y^2+\frac{390\cdot y}{7}+\frac{55981}{49} = 16$$

Simplificando la expresión:

$$49\left(x^2-\frac{268\cdot x}{7}+y^2+\frac{390\cdot y}{7}+\frac{55981}{49}-16\right) = 0 \rightarrow 49\cdot x^2-1876\cdot x+49\cdot y^2+2730\cdot y+55197 = 0$$

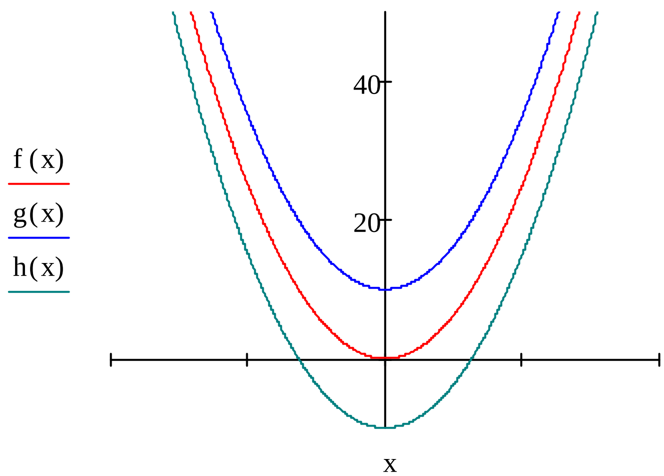
Parábola

Ejemplo 1

Graficar las tres siguientes funciones y observar el efecto del término independiente:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^2 + 10 \qquad h(x) = x^2 - 10$$

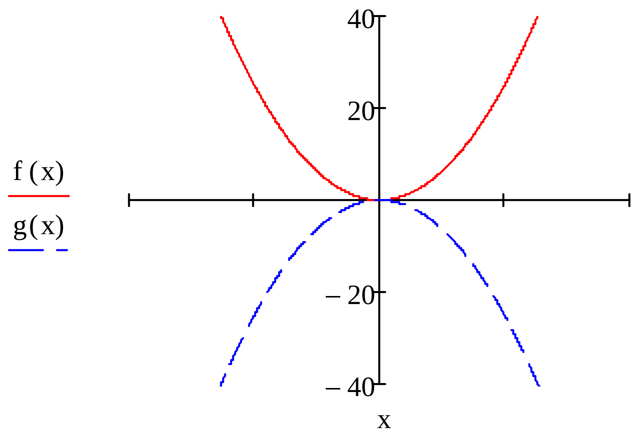
Solución



Ejemplo 2

Graficar las dos siguientes funciones y observar el efecto del signo negativo en el coeficiente de X:

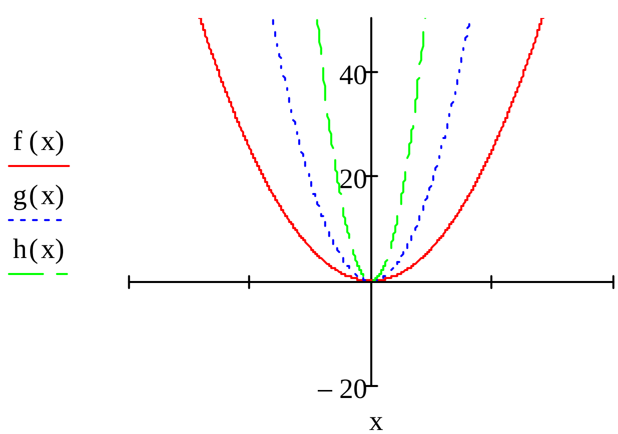
$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -x^2$$



Ejemplo 3

Graficar las dos siguientes funciones y observar el efecto del coeficiente de la X:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 3x^2 \qquad h(x) = 10x^2$$



Ejemplo 4

Determinar la ecuación de la parábola en su forma normal que pasa por los puntos (3, 4), (0, 1) y (2, -9) y cuyo eje es paralelo al eje *y*. Graficar la ecuación resultante,

Solución

Como el eje de la parábola es paralelo al eje *y*, sustituimos en la ecuación

$$x^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

los tres puntos dados y la ecuación resultante la almacenamos en una variable temporal para después utilizarla en la solución del sistema de ecuaciones resultante:

$$f1 := x^2 + D\,x + E\,y + F \text{ substitute}, x = 3, y = 4 \;\rightarrow 3\,D + 4\,E + F + 9$$

$$f2 := x^2 + D\,x + E\,y + F \text{ substitute}, x = 0, y = 1 \;\rightarrow E + F$$

$$f3 := x^2 + D\,x + E\,y + F \text{ substitute}, x = -2, y = 9 \;\rightarrow 9\,E - 2\,D + F + 4$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} f1 = 0 \\ f2 = 0 \\ f3 = 0 \end{pmatrix} \text{solve}, D, E, F \;\rightarrow (-2 \quad -1 \quad 1)$$

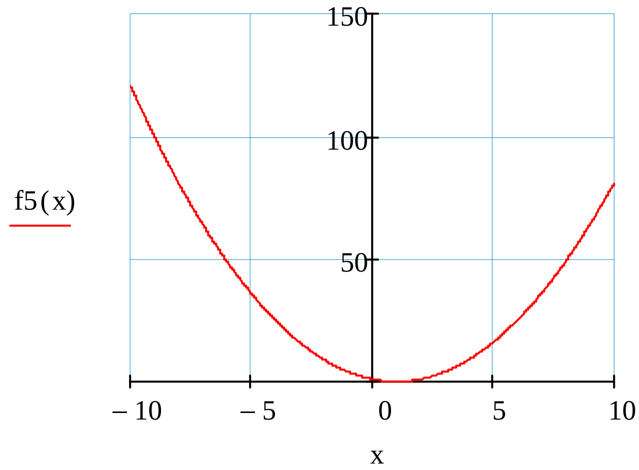
Sustituyendo los valores obtenidos en la forma normal:

$$f4 := x^2 + D\,x + E\,y + F \text{ substitute}, D = -2, E = -1, F = 1 \;\rightarrow x^2 - 2\,x - y + 1$$

$$f4 \rightarrow x^2 - 2\,x - y + 1$$

Para graficar la ecuación, dejamos la expresión obtenida sólo en términos de *x* y almacenamos el resultado en una nueva ecuación:

$$f5(x) := f4 = 0 \text{ solve}, y \rightarrow x^2 - 2x + 1$$



Aplicaciones en Cálculo Diferencial

Límites

Ejemplo 1

Puede demostrarse que el área de un polígono de *n* lados iguales inscrito en un círculo de radio 1 está dado por

$$A_n = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Completar la fórmula con los siguientes valores de n: 6, 10, 1000, 10000.

Solución

Definimos la fórmula en función de *n* y procedemos a sustituir los valores solicitados:

$$A(n) = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$A(6) = 2.5980762114$$

$$A(10) = 2.9389262615$$

$$A(1000) = 3.1415719828$$

$$A(10000) = 3.1415924469$$

Nota. Observe como el último valor tiende a π. Calculemos el valor de la función cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)\right) = \pi$$

Ejemplo 2

Estudiar el comportamiento de la siguiente sucesión $2+\frac{1}{2^n}$ cuando ***n*** tiende a infinito.

Solución

Representar la sucesión en forma de función para facilitar su estudio:

$$f(n) = 2+\frac{1}{2^n}$$

Construir una tabla de valores bajo un rango dado y observar el comportamiento de la función. Para esto, le asignaremos a ***n*** un valor que vaya cambiando desde un valor inicial de 1 hasta un valor final dado de 50 (puede escoger cualquier rango de valores para su estudio en ese rango en particular):

$$n = 1..50$$

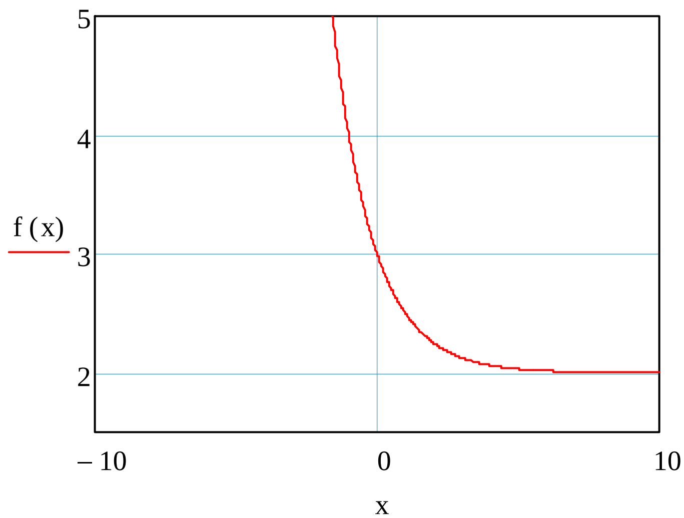
$f(n) =$

2.5
2.25
2.125
2.063
2.031
2.016
2.008
2.004
2.002
2.001
2
2
2
...

Observar que la función toma el valor de 2 cuando x tiende a un valor muy grande. Utilizando la función para el cálculo del límite de una función también obtenemos el mismo valor:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

Se muestra la gráfica de la función dada para comprobar visualmente que cuando X tiende a infinito el valor del límite tiende a 2:



Derivadas

Ejemplo 1

Encontrar los vértices (punto máximo o mínimo) de la función $y = a\,x^2 + \; b\,x + c$ completando el trinomio cuadrado perfecto.

Para facilitar el ejercicio, le damos a la función la siguiente forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = y$$

Multiplicamos la ecuación por ***a***, el coeficiente de la x^2:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{y}{a}$$

Pasamos el término independiente a la derecha de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{y}{a} - \frac{c}{a}$$

Completamos el cuadrado a la izquierda de la expresión sumando a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de ***x***:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Reducimos el trinomio cuadrado resultante en lado izquierdo de la ecuación:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Simplificamos el extremo de la derecha de la ecuación:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2}{4a} - c\right)$$

o

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y - \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

La expresión obtenida representa la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto

$$V(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$$

Reflexiones:

- Este ejercicio es esencialmente de procedimiento y de interpretación del resultado obtenido. Es de poca ayuda una calculadora o un paquete computacional

Ejemplo 2

La ecuación general de una parábola viene dada por la fórmula $a\,x^2 + \ b\,x + c = 0$; utilizando el concepto de derivada, determine las coordenadas del vértice de la ecuación.

Solución

Definimos la ecuación en función de X:

$$f(x) = a\ x^2 + b\ x + c$$

Derivamos la función con respecto a X:

$$\frac{d}{dx}f(x) = b + 2\ a\ x$$

Igualamos a cero la expresión encontrada (el valor de la pendiente vale cero en el punto máximo o mínimo de una función), resolvemos para X y encontramos la primera coordenada:

$$b + 2\ a\ x = 0$$

$$b + 2\ a\ x = 0 \text{ solve}, x \ = -\frac{b}{2\ a}$$

Con el valor de X encontramos el valor Y, la segunda coordenada buscada:

$$f\left(-\frac{b}{2\ a}\right) = c - \frac{b^2}{4\ a}$$

$$c - \frac{b^2}{4\ a} \text{ factor } = \frac{4\ a\ c - b^2}{4\ a}$$

Las coordenadas del vértice de la parábola vienen dada por:

$$V\left(-\frac{b}{2\,a}, \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}\right)$$

Reflexiones

- Este ejercicio muestra la facilidad para resolver el problema con la ayuda de una herramienta de cálculo simbólico. El estudiante debe conocer los principios matemáticos que sustentan esta solución

Ejemplo 3

A partir de su definición algebraica, calcule la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $x = 5$. Compruebe su resultado utilizando la función límite y la función derivada dada por un sistema computacional.

Solución

Definimos en valor de la variable y el de la función dada:

$$x = 5$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

La definición algebraica de la derivada de una función viene dada por la fórmula:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para encontrar su solución numérica construiremos una tabla de valores y observaremos su tendencia. Para esto, establecemos un valor inicial de 0.001, un valor final de 0.0001 y un incremento para la variable *h* de 0.0009:

$$h = 0.001, 0.0009 .. 0.0001$$

Con los valores dados para *x* y para *h*, calculamos la tabla correspondiente y observamos la tendencia de la expresión:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

10.001
10.001
10.001
10.001
10.001
10
10
10
10
10

En la tabla anterior se observa una tendencia al número 10.

Aplicando la fórmula de límite sobre la misma expresión tenemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 10$$

Aplicando la función de derivación se obtiene el mismo resultado:

$$\frac{d}{dx}f(x) = 10$$

Ejemplo 4

Dada la siguiente función $f(x) = x^2$, (1) encontrar su derivada, (2) el valor de la pendiente en cualquier punto dado de la curva, (3) la ecuación de la pendiente en el punto seleccionado y (4) graficar la ecuación y la ecuación de la pendiente en el punto dado.

Solución

1) Encontrar la derivada

Definir la función:

$$f(x) = x^2$$

Calcular la derivada simbólicamente:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2\,x$$

2) Valor de la pendiente en cualquier punto dado de la curva

Definir cualquier punto n y asignarle un valor:

$$n = \frac{1}{2}$$

Calcular el valor de la derivada en el punto *n* definido anterior (se almacenará el valor encontrado en una variable llamada m (de pendiente) para su uso posterior:

$$m = \frac{d}{dn} f(n)$$

$$m = 1$$

3) Ecuación de la pendiente en el punto seleccionado

Para identificar la ecuación de la pendiente, definimos una fórmula de cálculo en función de la pendiente y un punto:

$$\text{recta}(\text{pendiente}, P, x) = \text{pendiente}\left(x - P_1\right) + P_2$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección entre la recta y la curva dada:

$$P = \begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Con la pendiente m y el punto P podemos identificar la ecuación de la recta pendiente:

$$\text{recta}(m, P, x) = x - \frac{1}{4}$$

Grado de inclinación de la pendiente:

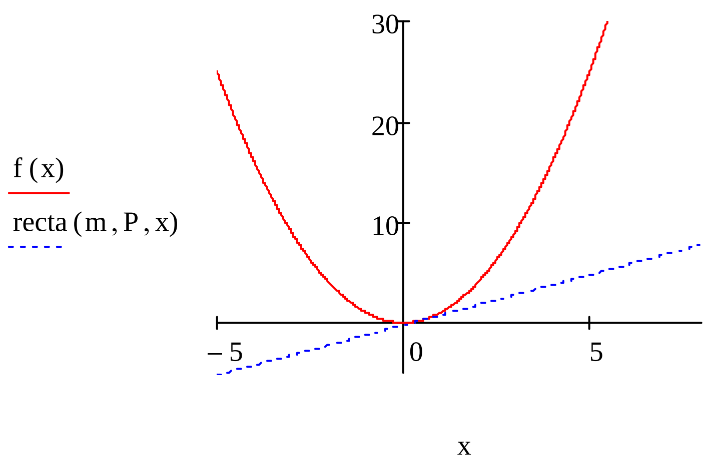
$$\text{atan}(m) = 45\,\text{deg}$$

$$\text{atan}(m) = \frac{\pi}{4}$$

4) Grafica de la ecuación dada y la ecuación de la pendiente en el punto dado:

Definir el rango de graficación:

$$x1 = -5 \quad x2 = 8 \quad y1 = -5 \quad y2 = 30$$



Nota.

En este ejercicio se muestra la posibilidad de crear una *plantilla* para la solución de este tipo de problemas. Con la *plantilla* creada se pueden resolver problemas semejantes y observar el cambio que se tiene en la solución al cambiar un parámetro dado; por ejemplo, vamos a resolver el mismo problema cambiando el valor del punto de intercepción de n = ½ a n = 3:

$$n = 3$$

$$m = \frac{d}{dn} f(n)$$

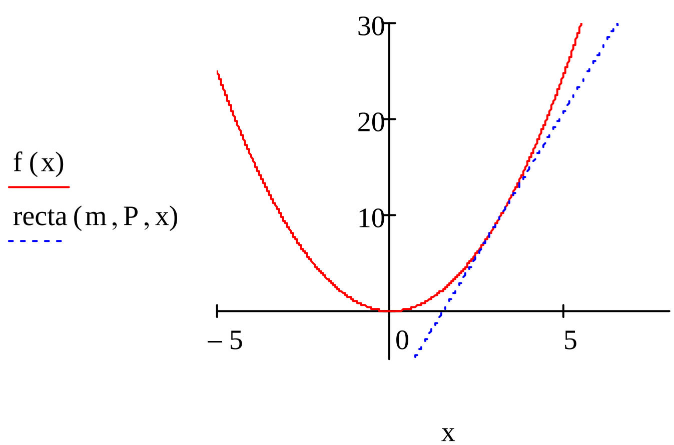
$$m = 6$$

$$P = \begin{pmatrix} n \\ f(n) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{recta}(m, P, x) = 6\,x - 9$$

$$\text{atan}(m) = 80.538\,\text{deg}$$



Ejemplo 5

Dada la curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$, hallar:

a) La inclinación de la curva cuando $x = 1$
b) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela al eje X.
c) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a la recta $2\,x - 3\,y = 6$

Solución

a) La inclinación de la curva cuando $x = 1$

Definimos la curva en función de X:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$$

Calculamos la inclinación de la curva en el punto x = 1:

$$x = 1$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = -1$$

Inclinación de la curva:

$$\operatorname{atan}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = -45\ \text{deg}$$

b) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela al eje X.

La curva es paralela al eje X cuando la pendiente en ese punto(s) es igual a cero; se deriva la función, se iguala a cero y se encuentra el punto buscado:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0 \text{ solve}, x \ = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a la recta 2 x-3 y = 6.

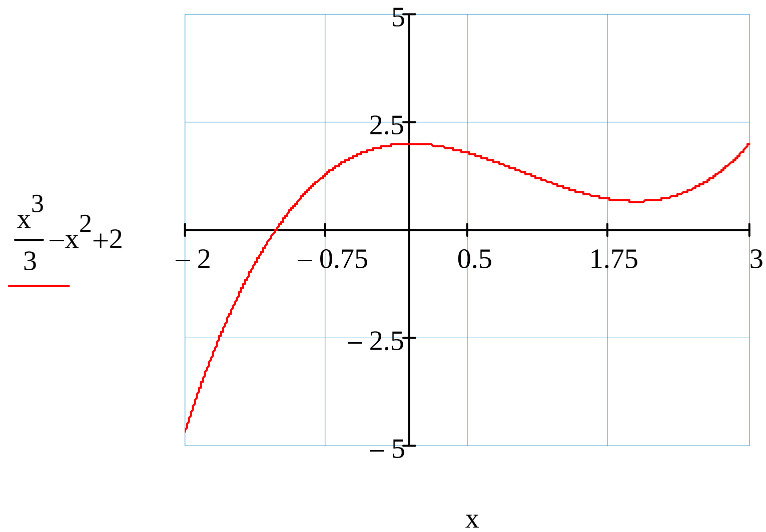
Si la recta dada es paralela a la pendiente buscada debe tener la misma pendiente:

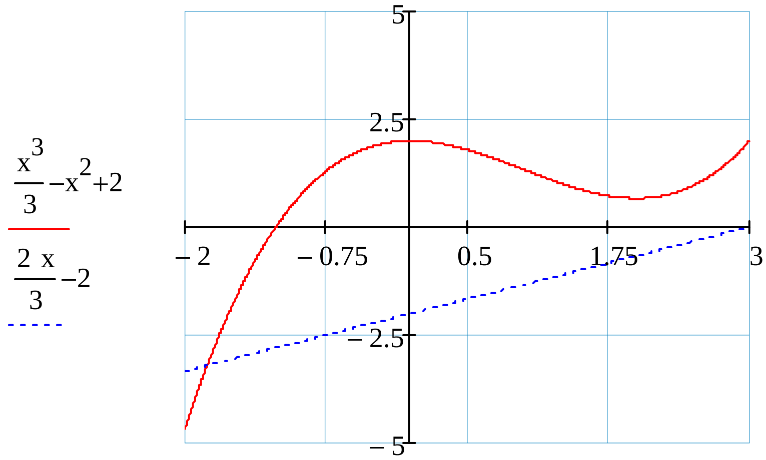
Pendiente de la recta 2 x-3 y = 6:

Transformamos la ecuación dada a la forma $y = m\,x + b$ donde m es la pendiente de la recta.

$$2x - 3y = 6 \text{ solve}, y \;\rightarrow\; \frac{2\,x}{3} - 2$$

$$m = \frac{2}{3}$$





x
3
3
−x
2
+2
2 x
3
−2
5
2.5
− 2.5
− 5
− 2
− 0.75
0.5
1.75
3

BIBLIOGRAFÍA

Diferentes ejemplos presentados en estos apuntes académicos han sido tomados de los siguientes libros:

Lehman C., 1959, Geometría Analítica. Editorial UTHEA, México.

Oteyza E., Lam E., Hernández C., Carrillo, Ramírez A., 2005, Geometría Analítica. Editorial Pearson, Prentice Hall, México.